Учебник «Алгебра», 7 кл., авт. М.И. Башмаков,

изд-во «Бином. Лаборатория знаний»

Комментарии к главе II

Многочлены

§1. Действия над многочленами

Записываем многочлен в стандартном виде

Общий комментарий

Многочлен определен нами как выражение, получающееся при сложении нескольких, не подобных между собой одночленов. Здесь допущен тот же компромисс, что и при определении одночлена, то есть, чтобы определить многочлен, мы используем операцию (сложение) над выражениями, но молчаливо допускаем преобразования многочленов, использующие законы этой операции, верные над числами. Например, мы будем писать равенство $2x + x^2 – 1 = x^2 + 2x – 1$, считая, что приводим многочлен к стандартному виду, не акцентируя внимание на том, получаем ли мы при этом новый многочлен или новую запись одного и того же многочлена.

В этом параграфе закладываются операционные навыки действий над многочленами. Твердой установкой курса является отказ от достаточно традиционной методики автоматического переписывания (часто в хаотическом беспорядке) всех получающихся одночленов с последующим поиском подобных. Советуем приучать учеников больше «работать глазами», анализировать выражения, прежде, чем писать, заботиться об удобной записи с точки зрения дальнейших преобразований, считать устно коэффициенты.

Это особенно важно при умножении многочленов с одной буквой. Советуем добиваться того, чтобы, например, при умножении $(x + 2)(x + 3)$ у учеников появлялась бы сразу запись типа $x^2 + 5x + 6$ или $x^2 + (2 + 3)x + 6$, вместо .$x^2 + 2x + 3x + 6$.

Обратим внимание на то, что при делении многочленов с остатком (если этот необязательный материал вы включаете в обучение) полезно завершать вычисления так, как это показано в учебнике, то есть, записывая равенство вида $A = B \cdot Q + R$ с явным указанием, что является делимым, делителем, неполным частным и остатком.

Еще раз обращаем внимание учителя на условность понятия *стандартный вид многочлена*. Даже для многочленов с одной буквой есть, по крайней мере, два естественных стандартных вида – расположение по убывающим и по возрастающим степеням буквы. Мы принимаем первый из них в качестве основного. Многочлены с несколькими буквами могут быть расположены по-разному. Может быть, самый надежный способ – полагаться на красоту и удобство записи. Во всяком случае, полезно вместе выписывать члены одной и той же степени и располагать однородные компоненты в убывающем порядке степеней.

Перемножаем многочлены

Многие учителя показывают способ умножения чисел столбиком, при котором ответ пишется сразу. Напомним этот способ на примере. Пусть надо умножить 237 на 142.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}237\\142\end{array} \\ \hline 33654\end{array}$$

Записываем числа друг под другом и находим последовательно цифры произведения (от единиц к десяткам и т. д.) по схеме, которая ясна из чертежа.

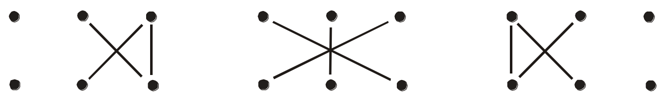
Чтобы найти последнюю цифру, умножаем 7 на 2, пишем цифру 4 и 1 «в уме». Далее: $3 \times 2 + 7 \times 4 + 1 = 35$, пишем 5 и 3 «в уме»:

$2 \times 2 + 3 \times 4 + 7 \times 1 + 3 = 26$ и т. д.

$4 \times 2 + 3 \times 1 + 2 = 13$

$2 \times 1 + 1 = 3$

Получается «скрестная» схема нахождения цифр:



Эта же схема применима для умножения многочленов с одной буквой. При умножении двух многочленов записываем их коэффициенты друг под другом:

4	3	2	1	0
		2	3	7
			×	
		1	4	2
2	11	21	34	14

$(2x^2 + 3x + 7)(x^2 + 4x + 2),$

$= 2x^4 + 11x^3 + 21x^2 + 34x + 14.$

Сейчас не надо переносить разряды и держать что-то «в уме», поэтому вполне можно начинать умножать не справа налево, а слева направо. Эта схема очень удобна, при небольших коэффициентах.

Делим многочлены с остатком

Деление многочленов не входит в обязательный минимум содержания обучения, однако мы настойчиво рекомендуем «расширить минимум» включением важного и достаточно простого вопроса о делении многочленов. Приобретенные здесь навыки будут полезны в дальнейшем – при преобразовании рациональных дробей, при построении графиков рациональных функций и т. п. Особенно важно научить делить на линейный двучлен. Пользоваться схемой Горнера (см. задания на выбор) здесь не обязательно.

§2. Формулы сокращенного умножения

Умножаем сумму на разность

Полезно обратить внимание на геометрическую интерпретацию (изображение) формулы умножения суммы двух слагаемых на их разность, а также на использование этой формулы при умножении двух чисел, находящихся на одинаковом расстоянии от числа, квадрат которого известен или легко вычисляется.

Возводим в квадрат и возводим в куб

Не стоит пугаться разговора в этом разделе о биноме Ньютона. Важно, чтобы у учеников на слуху были имена великих ученых, чтобы они «персонифицировали» новые знания и потом, читая, например, Булгакова, радовались тому, что согласны с фразой: «Подумаешь, бином Ньютона». Также как показывает опыт, после знакомства с формулой бинома Ньютона и треугольников Паскаля у учащихся становится меньше проблем в запоминании и отличии этих формул от других.

Основу этого и следующего разделов составляют формулы для квадрата и куба двучлена. Следует подумать, не стоит ли приучать учеников с самого начала записывать формулу для квадрата суммы в виде $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (сумма квадратов, сложенная с удвоенным произведением). Именно в таком виде она обобщается на случай суммы трех и более слагаемых. С помощью такой формулы легче выражать сумму квадратов и т. д.

Обратите внимание на симметричную форму записи формулы для куба суммы: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$. Такое представление гораздо важнее общепринятого и легче запоминается. При этом может возникнуть некоторая трудность при ее объяснении – мы ведь еще не занимались вынесением за скобки. Поэтому пока стоит ее просто запомнить. Чтобы показать, что она верная, можно раскрыть скобки.

Формулу для куба суммы трех слагаемых мы вывели среди примеров. Ее полезно показать в классе, но вряд ли стоит требовать ее запоминания.

Вокруг теории

1. Квадрат суммы двух выражений равен сумме квадратов этих выражений плюс их удвоенное произведение.

2. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 – 2ab$.

3. $(a_1 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + ... + a_n^2 + 2(a_1a_2 + ... + a_{n-1}a_n)$.

В классе лучше писать разные буквы: a, b, c, …. Полезно обсудить, сколько удвоенных произведений получается при $n = 2, 3, 4$?

4. Куб суммы двух выражений равен сумме кубов этих выражений плюс утроенное произведение суммы этих выражений на их произведение.

Можно, конечно, формулировать ответ и более привычным образом.

5. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

6. $1\,030\,301 = 1\,000\,000 + 30\,000 + 300 + 1 = 100^3 + 3\cdot 100^2\cdot 1 + 3\cdot 100\cdot 1^2 + 1^3 = (100+1)^3 = 101^3$.

Ответ: 101

7. Равна нулю.

Ответы и комментарии к заданиям

Произведение суммы и разности

2. Ответы: 3) 20,09; 5) 22491; 7) 399,91. **3**. 5) В этом примере приходится использовать вынесение общего множителя за скобки, но это не должно вызвать затруднений, так как с аналогичными действиями с числовыми выражениями учащиеся уже знакомы.

Тождество

17. Тождества 1) – 5) доказываются прямым вычислением или применением известных тождеств. Тождество 6), известное с античных времен, связано с формулой $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$. Тождество 7) является следствием известного условного тождества, если $x+y+z = 0$; то $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$. Тождество 8) обобщает тождество 3) и может быть обобщено на любое число слагаемых (тождество Лагранжа).

3) $$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) + \\ +(a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2.$$

Можно было справа получить другой результат, например, в первой скобке может быть минус, а во второй – плюс. Тождество 3) уже упоминалось. Позже при изучении комплексных чисел оно будет означать, что квадрат модуля произведения двух комплексных чисел равен произведению квадратов их модулей.

4) $$(x^2+xy+y^2)^2 = ((x^2+xy)+y^2)^2 = (x^2+xy)^2 + y^4 + 2(x^2+xy)y^2 = \\ (x^2+xy)^2 + x^2y^2 + (x^2y^2 + 2xy\cdot y^2 + y^4) = (x^2+xy)^2 + x^2y^2 + (xy+y^2)^2.$$

8) Тождество можно доказывать по-разному. Проще, на наш взгляд, упрощать левую и правую часть, приводя их к многочлену стандартного вида.

§3. Разложение многочлена на множители

Выносим общий множитель

Цель этого раздела – систематизировать уже накопленные навыки преобразований многочленов, при которых приходится выносить общий множитель за скобки.

Надо обратить особое внимание на вынесение множителя «с минусом», т. е. на примеры типа $c - a + b = -(a - b - c)$, $x^3y - 2x^4 - 2x^2y^2 = -x^2(2x^2 - xy + 2y^2)$ и т. п.

Кроме того, нужно добиться понимания учащимися, что выражение является разложенным на множители.

Группируем слагаемые

Стандартный материал. Рекомендуем не пожалеть времени на обсуждение вариантов группировки. Несомненно, что прием разбиения одного слагаемого на сумму двух подобных является наиболее трудным.

В конце раздела показаны 5 способов группировки шести слагаемых выражения A и при этом отмечено, что рассмотрены не все способы группировки.

Применяем формулы сокращенного умножения

В раздел включены числовые примеры на применение формул сокращенного умножения и ни для кого не секрет, что у учащихся, особенно на первых порах они вызывают большие затруднения. Отметим, что формулы суммы и разности кубов, мы считаем, стоят на рубеже между минимальным и желательным уровнем усвоения.

Обращаем внимание на разложение квадратного трехчлена на множители. В учебнике много внимания уделяется этому вопросу не случайно. Квадратный трехчлен приходится раскладывать на множители довольно часто и в основной и в старшей и даже в высшей школе.

Существует, по крайней мере, три способа разложения на множители квадратного трехчлена.

Первый способ – это способ группировки, при котором надо разбить средний член на два слагаемых: $x^2 + 4x - 5 = x^2 - x + 5x - 5 = x(x - 1) + 5(x - 1) = (x - 1)(x + 5)$.

Второй способ – это способ выделения полного квадрата, обсуждаемый в этом разделе: $x^2 + 4x - 5 = x^2 + 4x + 4 - 9 = (x + 2)^2 - 3^2 = (x + 5)(x - 1)$.

Третий способ – это подбор корней с помощью теоремы Виета и использование теоремы Безу: Этот способ будет обсуждаться позже, хотя некоторая подготовка к нему может быть сделана уже сейчас (например, соображение о том, что если сумма коэффициентов равна нулю, то многочлен делится на $x - 1$). Отметим, что как известно, эти методы разложения не является специфической задачей только для квадратного трехчлена,

Ответы и комментарии к заданиям

Общий множитель

2. Ответы: 1) $(y+z)(x+y)$; 5) $a^2(a-b+c)$; 6) $xy(x+y+z)$;

7) $z(x^2+y^2+z^2)$; 10) $(b-c)(a^2-b^2)$; 12) $(a-b+c-d)(x-y+z-t)$.

3. Ответы: 1) $(a+b)(a-b)$; 2) $(x-y)(2x+y)$; 3) $2(x-3)^2$; 5) $(a+b)(2a+b)$; 6) $(x+y+z)^2$;

9) $(a-b)(b-c)(c-a)(2a+b-3c)$.

Группировка

5. Ответы: 3) $(x+z)(x+y)$; 5) $(a+2b)(x+y)$; 7) $(x-a)(x-b)$; 9) $(x-2y)(x-3y)$.

6. Ответы: 1) $(a-b+c)(x+y)$; 3) $(x-y)(xy-y+3)$; 5) $(3x+2y)(2x+3z)$;

7) $(x-y)(xy-y+3)$; 9) $(a-b)(x+y+z)$.

Сумма и разность кубов

10. Ответы: 8) $(5ab+4)(25a^2b^2-20ab+16)$;

9) $(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

11. Ответы: 7) $-(b+2)(b^2+7b+13)$; 10) $2(2x+y)(2x^2-2xy+y^2)$.

12. Ответы: 1)2; 2) –2; 3) –6; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 8.

13. Ответы: 1) 2; 2) $(x+2)(x^2-2x+4)$; 5) $(5a+3b)(25a^2-15ab+9b^2)$.

14. Ответы: 1) $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2+2ab+ac+bc)$; 3) $2(a-b)(a^2-2ab+13b^2)$.

15. Ответы: 1) $x^3+3x^2+3x+1-27=(x+1)^3-27=(x-2)(x^2+5x+13)$;

3) $$27mn^2-9m^2n-27n^3-26m^3=m^3-9m^2n+27mn^2-27n^3-27m^3=$$
$$(m-3n)^3-27m^3=-(2m+3n)(13m^2-15mn+9n^2).$$

Квадратный трехчлен

16. Ответы: 1) $x^2+4x-7=x^2+2\cdot 2\cdot x+4-11=(x+2)^2-11$;

3) $x^2-8x-1=x^2-2\cdot 4\cdot x+16-17=(x-4)^2-17$;

5) $x^2 - 12x + 5 = x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 36 - 31 = (x-6)^2 - 31$.

18. Ответы: 1) 2; 3) $6x^2$; 5) $(-4x^2 + 6x + 15) + (5x^2 + 4x + 10)$.

В последнем примере следует обратить внимание, что решение не единственно. Полезно обсудить, почему.

Формулы сокращенного умножения и геометрия

20. 1) (1↔ 4); (2↔1); (3↔5); (4↔2); (5↔3); (6↔6). Первая цифра – номер строки, вторая – номер столбца.

21–23. Важно, чтобы учащиеся поняли, что формулы сокращенного умножения действительно позволяют во многих случаях производить вычисления устно.

Автоматы

24. Ответы: 3) $a - b$, $A \circ A \circ A(a-b) = A \circ A(a^2 - b^2) = A(a^4 - b^4) = a^8 - b^8$;

4) A(1– 0,01) = (1– 0,01)(1+0,1)=0,9999

Обратите внимание в задачах на автоматы на то, что А(1 + x) = 1 – x^2. Для этого надо понимать сумму 1 + x как разность 1 – (–x).

Тождества

25. Ответы: Верными являются тождества 2, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 17, 18, 19. Остальные тождества неверны, но легко исправляются.

Беседа. ***Обсуждаем свойства многочленов***

Беседа в конце этой главы впервые имеет вид теоретического осмысления изученного материала. Обратим внимание на главное.

В беседе впервые появляется содержательное доказательство – вывод правила сокращения многочленов. Оно носит локальный характер, так как немедленно выводится из предыдущего свойства. Примененное рассуждение часто встречается в алгебре. Напомним учителю, как доказывается предыдущее свойство: если произведение многочленов равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю. Это свойство опирается, в свою очередь, на утверждение о том, что старший член произведения является произведением старших членов сомножителей. Так как коэффициент произведения одночленов равен произведению коэффициентов сомножителей, то мы выводим результат из аналогичного свойства чисел – произведение двух чисел, каждое из которых отлично от нуля, не может равняться нулю.

Сюжет 1. ***Автомат Горнера***

Для деления многочлена на двучлен $x-1$ схема Горнера особенно проста – последовательно находятся суммы коэффициентов. При делении на любой двучлен она немного усложняется. Этот сюжет предложен не столько для обучения делению на двучлен, сколько на идею алгоритмизации вычислений. Пример со схемой Горнера выбран в качестве одного из самых простых и известных.

Сюжет 2. ***Сумма коэффициентов многочленов***

Сумма коэффициентов любого многочлена получается, если положить все буквы, входящие в многочлен, равными единице.

5. Положив $x=1,\ y=1$, получим (1+1)(1+2)(1+3)(1+4)=120.

Сюжет 3. ***Приближенные вычисления***

1. Ответы: 1) $1,01^2=(1+0,01)^2=1+2\cdot 0,01+0,01^2=1+0,02+0,0001=1,0201$;

2) 1,004004; 3) 1,0000800016;

4) $0,998^2=(1-0,002)^2=1-2\cdot 0,002+0,000004=0,996004$;

5) $1,03^3=(1+0,03)^3=1+3\cdot 1^2\cdot 0,03+3\cdot 1\cdot 0,03^2+0,03^3=$
$1+0,09+0,0027+0,000027=1,092727;$

6) 1,003003001; 7) 999,700029999.

2. Ответы: $(1+h)^2=1+2h+h^2,\quad (1+h)^3=1+3h+3h^2+h^3$.

1) $2h=0,02;\quad h^2=0,0001;\ 3h^2=0,0003;\ h^3=0,000001;$

2) $2h=0,002;\quad h^2=0,000001; 3h^2=0,000003;\ h^3=0,000000001;$

3) $2h=0,0004;\quad h^2=0,00000004;\ 3h^2=0,00000012;\ h^3=0,000000000008$.

3. Ответы: 1)1,06; 2) 1,002; 3) 0,98; 4) 1,001; 5) 0,9986; 6)1,09; 7) 1,009; 8) 0,94; 9) 1,0012; 10) 0,9991.

4. Ответы: 1) 1,0016; 2) 0,9988; 3) 1,002; 4) 0,9985.

5. Ответы: 1) 4,08; 2) 26,919; 3) 9,0012; 4) 32,48; 5) 0,9985.

6. Разложение $1-x^2=(1-x)(1+x)$ применяется для приближенных вычислений. Если $x-$ маленькое число, то x^2 еще меньше, и в вычислениях им можно пренебречь. Тогда $(1-x)(1+x)\approx 1$, и при маленьких x $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x, \dfrac{1}{1-x}\approx 1+x$.

Ответы: 1) 0,998; 2) 0,9996; 3)1,01; 4) 1,003; 5) 0,49; 6)0,334.

Последние два примера вычисляются по более сложной формуле:

$a^2 - x^2 = (a-x)(a+x)$. При маленьких x $\dfrac{1}{a+x} \approx \dfrac{a-x}{a^2}, \dfrac{1}{a-x} \approx \dfrac{a+x}{a^2}$.

Сюжет 4. ***Квадраты в теории чисел***

Изучается поведение остатков целых чисел при делении на число n («по модулю n»). Квадраты по модулю n – непростая классическая тема. Если p – простое число, то ровно половина $\left(\dfrac{p-1}{2}\right)$ ненулевых остатков являются квадратами, остальные нет. Кроме того, полезно знать квадраты по модулю 4 и по модулю 8. В этом сюжете квадраты по модулям 3, 4 и 8 находятся экспериментально.

Затем результат наблюдений используется для доказательства нескольких теоретико-числовых утверждений.

1. Любое число можно представить в виде $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$. Два из них (первое и третье) четные, следовательно, нечетное число может быть представлено либо в виде $4k+1$, либо $4k+3$.

2. $(4m+1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 4(4m^2 + 2m) + 1 = 4k + 1$, где $k = 4m^2 + 2m$;

$(4m+3)^2 = 16m^2 + 24m + 9 = 4(4m^2 + 6m + 2) + 1 = 4k + 1$, где $k = 4m^2 + 6m + 2$.

3. $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$. Число $k(k+1)$ четно, поэтому число $4k(k+1)$ делится на 8.

4. Выше мы доказали, что квадрат любого нечетного числа представим в виде $4k+1$, т. е. при делении на 4 дает остаток 1, квадрат четного числа делится на 4 без остатка, откуда следует, что квадрат целого числа не может быть представлен в виде $4k+3$.

5. При делении квадрата нечетного числа на 8 в остатке может быть только 1 (см. п.3), а при делении на 8 квадрата четного числа в остатке может быть только 0 или 4, следовательно, не могут быть квадратами числа, представимые в виде $8k+2, 8k+3, 8k+5, 8k+6, 8k+7$.

Примеры: $8k = 16$ при $k = 2$; $8k+1 = 9$ при $k = 1$; $8k+4 = 36$ при $k = 4$.

6. Число x^2 должно быть нечетным, следовательно, число x также нечетное. Остаток от деления x^2 на 8 равен 1, остаток от деления y^2 на 8 может быть равен 0, 1 или 4. Известно, что при сложении чисел остатки складываются, при умножении – умножаются, поэтому остаток от $2y^2$ на 8 может быть равен 0 или 2, а остаток от деления x^2+2y^2 на 8 может быть равен 0, 1, 2, 3, 4 или 6. Остаток же от деления 2005 на 8 равен 5

7. Число $3m+2$ при делении на 3 имеет остаток 2. Любое целое число представимо в виде $3m, 3m+1$ или $3m+2$. $(3m)^2=9m^2$– делится на 3; $(3m+1)^2$ и $(3m+2)^2=9m^2+12m+3+1$ при делении на 3 дают остаток 1.

8. Ответы: 0 и 1.

9. Ответ: Следует из 8.

10. Ответы: 0,1 и 4.

Сюжет 5. ***Выделение известного множителя***

1. Ответы:

1) $$\begin{gathered}x^4+x^2+1=x^4+x^3+x^2-x^3+1=x^2(x^2+x+1)-x^3-x^2-x+x^2+x+1=\\ x^2(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1);\end{gathered}$$

2) $(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$; 3) $(x^2+x+1)(x^3-x+1)$;

4) $(x^2+x+1)(x^5-x^4+x^2-x+1)$; 5) $(x^2+x+1)(x^6-x^5+x^3-x^2+1)$;

6) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6-x^4+1)$.

Комментарий

Корни многочлена x^2+x+1 – это комплексные кубические корни из единицы. $x^2+x+1=0 \Rightarrow x^3=1$. Поэтому $x^{3k}=1$, $x^{3k+1}=x$, $x^{3k+2}=x^2$.

Трехчлены вида x^m+x^n+1, если взять любые числа m и n, дающие при делении на 3 остатки 1 и 2 (в любом порядке), всегда будут делиться на . x^2+x+1.

Сюжет 6. ***Использование тождеств***

1 ↔ г; 2 ↔ д; 3 ↔ б; 4 ↔ а; 5 ↔ в.

Сюжет 7. ***Делимость чисел***

1. $(5n+7)^2-(n-1)^2=(6n+6)(4n+8)=6\cdot 4\cdot(n+1)(n+2)$.

Число $(n+1)(n+2)$ делится на 2, а все произведение на 48.

2. $\left(5n-\frac{11}{2}\right)^2-\left(2n-\frac{17}{2}\right)^2=(7n-14)(3n+3)=7\cdot 3\cdot(n-2)(n+1)$.

Числа $n+1$ и $n-2$ разной четности.

3. Применить тождество $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$.

Если $x+y+z$ делится на 6, то хотя бы одно из слагаемых четно. Поэтому $3xyz$ делится на 6.

4. $n^5–5n^3+4n=n(n^4–5n^2+4)=n(n–1)(n+1)(n–2)(n+2) = (n–2)(n–1)\ n\ (n+1)(n+2)$.

Из пяти последовательных чисел одно делится на 5, одно делится на 3, по крайней мере, одно на 4 и еще хотя бы одно на 2.

5. Их произведение $4^n– 1$ делится на 3, потому что 4^n имеет остаток 1 при делении на 3.

6. $49^{51}+ (100–49)^{49}$. Если мысленно раскрыть бином, то все слагаемые, кроме последнего, будут делиться на 100. Остаются два слагаемых: $49^{51}– 49^{49}= 49^{49} (49^2–1) = 49^{49} \cdot 48\cdot 50=24\cdot 49^{49}\cdot 100$.

7. Пусть $A=(n-4)(n+7)+33$.

1) Если $n-4$ делится на 11, то и $n+7$ делится на 11. Тогда $(n-4)(n+7)$ делится на 121. Если бы при этом и A делилось на 121, то и 33 делилось бы на 121, что неверно.

2) Если $n-4$ не делится на 11, то и $n+7$ не делится на 11. Тогда $(n-4)(n+7)$ не делится на 11. Значит, A не делится даже на 11.

Математический кружок

Занятие* 3. *Симметричные многочлены

Раздел, посвященный симметрии, включается в календарное планирование лишь при наличии дополнительного времени. В то же время этот материал легко может быть использован на кружке или для самостоятельного изучения. Просмотреть формулы этого раздела очень полезно даже при стандартном планировании. Для этого вполне достаточно примерно половины одного академического часа.

Учителю полезно держать в голове рекуррентную формулу для суммы n-ых степеней $S_n = a^n + b^n$: $(a + b)(a^n + b^n) = a^{n+1} + b^{n+1} + ab^n + a^nb = a^{n+1} + b^{n+1} + ab(a^{n-1} + b^{n-1})$, т. е. $(a + b)S_n = S_{n+1} + abS_{n-1}$, или $S_{n+1} = (a + b)S_n – abS_{n-1}$.

Этот прием будет очень полезен в теме «Квадратные уравнения».

Серия 1. 1. 1) A^3-3AB; 2) A^2-4B; 3) $A^4-4A^2B+2B^2$; 4) $A^3+A^2-3AB-2B$; 5) $A+B+1$; 6) A^4-4A^2B; 7) A^4-3A^2B.

Занятие* 4. *Доказательство тождеств

Помимо выработки навыков в преобразованиях, полезно накапливать набор «знакомых» тождеств. Советуем некоторые тождества доказывать разными способами.

Серия 1. *Суммы квадратов*

1. Тождества 1) и 2) можно доказать, раскрыв скобки в обеих частях равенства.

2. $$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)=(a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n)^2+(a_1x_2-a_2x_1)^2+$$
$$(a_1x_3-a_3x_1)^2+\ldots+(a_1x_n-a_nx_1)^2+\ldots+(a_{n-1}x_n-a_nx_{n-1})^2.$$

3. Следует из 1).

4. Приведем одно из возможных доказательств. Раскроем скобки и приведем подобные члены. Получим

$$4\ \ a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ \ =2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de).$$

Применим к каждому слагаемому справа очевидное неравенство $pq\le\frac{1}{2}(p^2+q^2)$, которое превращается в равенство $p=q$. Получим, что правая часть меньше левой части, причем равенство возможно лишь при $a=b=c=d=e$ (вовсе не обязательно равны 1).

5. 3) следует из **1**. 2) при $x=a, y=b, z=c$.

Серия 2. Суммы кубов

1. $$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-(x^3+y^3)=$$
$$(x+y)(x^2+2xy+y^2+3xz+3yz+3z^2-x^2-y^2+xy)=$$
$$3(x+y)(xy+xz+yz+z^2)=3(x+y)(y+z)(z+x).$$

2. Тождество легко доказывается раскрытием скобок в правой части и взаимного уничтожения одночленов с противоположными знаками.

3. Следует из 1 при $x=a+b-c,\quad y=b+c-a,\quad z=c+a-b$.

4. Следует из 1 при $x=a-b,\ y=b-c,\ z=c-a$:

$$x+y+z=a-b+b-c+c-a=0\Rightarrow(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=$$
$$3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Серия 3. *Суммы четвертых степеней*

1. Использовать разложение $a+b\ {}^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$:

$$a+b\ {}^4+a^4+b^4=2a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+2b^4=$$
$$2(a^4+2a^3b+a^2b^2+2a^2b^2+2ab^3+b^4)=2(a^2+ab+b^2)^2$$

2. Обозначим $x=a-c,\ y=b-a\Rightarrow b-c=x+y$. Левая часть равенства принимает вид $(x+y)^4+x^4+y^4$. Далее применим 1.

3. В условии задачи опечатка – потерян коэффициент 2.

$$(b-c)^4+(c-a)^4+(a-b)^4=(b-c)^4+((c-a)^2+(a-b)^2)^2-2(c-a)^2(a-b)^2=$$
$$((b-c)^2+((c-a)^2+(a-b)^2))^2-2(b-c)^2((c-a)^2+(a-b)^2)-2(c-a)^2(a-b)^2=$$
$$4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2-2(b-c)^2((c-a)^2+(a-b)^2)-2(c-a)^2(a-b)^2.$$

$$4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2-2(b-c)^2((c-a)^2+(a-b)^2)-2(c-a)^2(a-b)^2=$$
$$4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^2-2((b-c)^2(c-a)^2+(b-c)^2(a-b)^2+(c-a)^2(a-b)^2).$$

Если теперь обозначить левую часть исходного равенства X, а правую A, то, используя тождество 2, получим: $2X-A=X\Rightarrow X=A$, что и требовалось доказать.

<u>Серия 4</u>. *Условные тождества*

1**.** Следует из 2 в серии 2.

2. Следует из 1 в серии 3, так как $(a+b)^4=c^4$;

3. Воспользуемся разложением бинома пятой степени. Получить формулу можно умножив $(a+b)^3$ на $(a+b)^2$ и приведя подобные члены, а можно вспомнить треугольник Паскаля (стр. 113):

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$. Тогда

$$a^5+b^5+c^5=a^5+b^5-(a+b)^5=-(5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4)=$$
$$=-5ab\left[(a^3+b^3)+2ab\ \ a+b\ \ \right]=-5ab\ \ a+b\ \ \ a^2+ab+b^2\ \ =5abc\ \ a^2+ab+b^2 \qquad (1)$$

Кроме того,

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+(a+b)^2=2\ \ a^2+ab+b^2\ \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}\ \ a^2+b^2+c^2$$

Подставив это выражение в (1), получаем тождество.

Комментарий. Можно было доказать тождество иначе: умножить $a^2+b^2+c^2$ на $a^3+b^3+c^3$, вычесть лишние слагаемые и после несложных преобразований с использованием уже доказанных тождеств получить нужный результат. Но приведенное доказательство более прозрачно, да и знакомство с разложением бинома более высокой степени, несомненно, будет полезно.

4. Следует из задач 1. и 3.