Комментарий и решение наиболее сложных заданий к учебнику «Алгебра, 7», автор М. И. Башмаков

Глава I
Введение в алгебру

§ 1. Буквенное выражение

Общий комментарий

Понятие буквенного выражения формируется постепенно. Первый параграф не содержит какого-либо определения этого понятия. Обратите внимание на то, что в школьных учебниках используется три термина – алгебраическое выражение, рациональное выражение и буквенное выражение. Использование первого и третьего термина фактически равноправно и дело вкуса учителя использовать их оба или только одно из них. В учебнике буквенное выражение отождествляется с алгебраическим выражением. Поэтому, возможно, преждевременно задавать ученикам вопрос, что такое буквенное выражение. Основной акцент в § 1 делается на составление выражения. Вычисление значений выражения важно для сохранения и развития простых вычислительных навыков. Буквы в выражении – это не переменные, как это понимается при функциональном подходе, хотя во многих учебниках буквы в выражении часто называются переменными. Разница в алгебраическом и функциональном подходе может быть грубо описана так. Алгебра учит операциям с буквенными выражениями, не задумываясь над тем, будем ли мы подставлять вместо букв их значения (и какие это будут значения). Теория функций рассматривает выражения с переменными, неотрывно связывая их с областью определения этих переменных.

Каждый параграф разбит на небольшие смысловые части, которые примерно можно считать содержанием одного урока или объединять два-три раздела в один урок, в зависимости от состава учащихся. Важно не торопиться, так как от овладения материалом первой главы зависит успешность учащихся в дальнейшем.

Заменяем числа буквами

Полезно напомнить, что числовое выражение – это числа, соединенные знаками арифметических действий. Выполнив все действия, мы получим число – значение числового выражения.

При составлении алгебраического выражения по данному числовому нужно повторяющиеся числа заменять буквами. Обратно, исходное числовое выражение можно получить, заменяя букву ее числовым значением.

К этому моменту учащиеся уже хорошо знают законы арифметики, применяемые к любым числам (перестановочный – коммутативность, сочетательный – ассоциативность, распределительный – дистрибутивность). Теперь эти законы формулируются в общем виде с заменой чисел на буквы. В этом месте важно обратить внимание учеников, что именно потому, что числа могут быть любыми, мы их можем заменить буквами, и вообще, любое общее утверждение относительно чисел можно и удобно записывать буквами.

Составляем буквенное выражение

Здесь следует обратить внимание на процесс составления буквенных выражений:

Берутся простейшие выражения - числа и буквы и с помощью арифметических операций составляется буквенное выражение. Полезно подробно обсудить, как получается второе выражение для площади уголка:

$$S = 3 \cdot 6 + (10 - 3) \cdot (6 - 3)$$

и как от этого числового выражения мы приходим к буквенному

$$S = ab + (c - a)(b - a)$$

При составлении выражений встречаются квадраты: 3^2, a^2, 10^2, 23^2, $a^2 - b^2$ и т. п. Если ученики с этим обозначением уже встречались, но могли забыть, надо коротко объяснить, как оно используется.

Вычисляем значения буквенных выражений

Теперь можно потренироваться переходить от числовых выражений к алгебраическим и, наоборот, придавая буквам определенные числовые значения, получать числовые выражения. Если в таком числовом выражении произвести все указанные арифметические действия, то получим значение алгебраического выражения при данных числовых значениях входящих в него букв

Находим область допустимых значений

В тексте встречается слово *операция*. Оно может оказаться новым для учащихся. Можно сказать, что оно является синонимом слова *действие*: действие сложения – операция сложения.

При подстановке выбранных чисел в буквенное выражение может оказаться, что невозможно произвести указанные действия. Сложение, вычитание, умножение определены для любых чисел, а вот деление на нуль не выполнимо. Тогда числовое значение выражения при данных значениях букв не определено. Набор значений букв, входящих в буквенное выражение, при которых его значение определено, являются *допустимыми* значениями букв, а множество (совокупность) таких наборов образует *область допустимых значений*.

Словосочетание *набор чисел* может появиться впервые. Необходимо проиллюстрировать на примерах.

Следует обратить внимание учеников, что всегда нужно проверять те выражения, на которые приходится делить.

Обратите также внимание учащихся на новые понятия, которые появляются в этом разделе: *рациональные и целые выражения.* Об этом говорится в комментарии.

Ответы и комментарии к заданиям

<u>От чисел к буквам</u>

1. Как переходить от числовых выражений к буквенным?

Разумеется, буквы можно выбирать по-разному.

Полезно обратить внимание учеников, что в примерах 2)-7) не имеет значения, как обозначили числа буквами. Эти выражения симметричны по отношению к введенным обозначениям (рекомендуем обсудить, что это означает, так как идея симметрии во многих задачах позволяет быстрее получить ее решение) .

2. 3) Последняя цифра 5, следовательно, если к этому числу прибавить 5, то оно будет оканчиваться нулем, т.е. будет делиться на 10, тогда его можно записать как $10n$, значит, исходное число равно $10n-5$. Возможно, что ученики предложат вычесть число 5, а затем записать ответ в виде: $10n+5$. Тогда число 5 будет потеряно, на это нужно обратить их внимание.

3. а) $2n-1$; б) $\dfrac{n}{n+1}$; в) n^2-1; $\dfrac{n+1}{n^2}$.

В задании 2 встречается выражение *классы* чисел. Это синоним слова *множество*.

4. 4) $a_1=2, a_2=1, a_3=2, a_4=1, a_5=2...$

Числа 2 и 1 чередуются. На одинаковом расстоянии от этих чисел находится число 1,5, т.е. $2=1{,}5+0{,}5$; $1=1{,}5-0{,}5$. На нечетном месте стоит число $a_{2n-1}=1{,}5+0{,}5$, а на четном месте $-$число $a_{2n}=1{,}5-0{,}5$. Знаки «+» и «$-$» мы можем записать как $(-1)^{n+1}$, тогда. при нечетном n мы получим знак «+», при четном «$-$», следовательно, при любом n $a_n=1{,}5+(-1)^{n+1}0{,}5$.

Аналогично решается задача 6)

<u>*Составление буквенного выражения*</u>

Задания 5 и 6 очень важны для формирования навыков работы с условием задания. Работа с условием задания, - это одна из проблем, которая мешает многим школьникам осваивать математику. Часто внимательное чтение является достаточным для правильных рассуждений ученика. Поэтому желательно, чтобы ученик читал условие вслух и одновременно выполнял действия.

В примере 5 нужно написать буквенное выражение, исходя из действий, которые требуется выполнить, а в примере 6, наоборот, - по буквенному выражению указать действия.

5. 1) 2 $(a + b + c)$; 5. 2) $\dfrac{a-b}{a^2+b^2}$; 3) $(a + b)(a - b)^2$; 4) $\dfrac{a}{b}+2ab$; 5) $\dfrac{a^3+b^3}{(a+b)^3}$.

7. 2) 28. Конечно, можно посчитать площадь по клеточкам, а можно применить теорему Пика, если ребята о ней слышали в 5-6 классах: $S=n+\dfrac{m}{2}-1$, где $n-$число вершин квадратиков внутри фигуры, а $m-$число таких вершин на границе и вершины фигуры находятся в целочисленных узлах клеточек. Ученики могут составить и другое выражение: $S=a+2b$, где $a-$число целых квадратиков, $b-$число половинок. Возможны и другие варианты.

8. 2) $\overline{cba}=100c+10b+a$;

4) $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{bc}=10a+b+10a+c+10b+c=20a+11b+2c$;

6) $1001a+110b+110c+1001d$.

В последнем примере полезно отметить симметрию в ответе и обсудить, почему она появляется.

Значение выражения

В примерах **10**. 2) - 4) нужно обратить внимание, что не любые наборы значений букв можно подставлять в выражения.

Заметьте, что выражение A в примере 3) тождественно равно 1, а в примере 4) тождественно равно x. Этот факт будет обсуждаться гораздо позже, но обратить внимание на него полезно сейчас.

11. 2) Приравниваем знаменатель нулю: $a+3b=0 \Rightarrow a=-3b$. Отсюда следует, что либо $a=b=0$, либо a и b должны быть разных знаков и a по абсолютной величине в 3 раза больше b.

Автоматы

Мы настойчиво рекомендуем регулярно включать задания на автоматы в учебный процесс. Этот тип задач интересен, направлен на развитие алгоритмического мышления. Заметим, что дискретная математика, работа с программами, да и просто организация математической деятельности основаны на применении пошаговых конструкций, используют операторный язык. Нового в этих заданиях на самом деле ничего нет. Некоторую трудность могут вызвать операторные обозначения, к которым надо привыкнуть. Мы предпочитаем не ставить аргумент в скобки без особой необходимости и писать Ax вместо $A(x)$. Конечно, скобки нужны в формулах типа $A(–2)$ и $A(a + b)$.

15.1. 1) $(A\circ B\circ C)(x)=(A\circ B)(Cx)=(A\circ B)(x^2)=A(B(x^2))=A(2x^2)=2x^2+3$;

2) $(2x+3)^2$; 3) $2(2x+3)$; 4) $4x^2$.

2. 1) 1; 3) a; 5) a^2+a; 7) $4a+1$; 9) $a+1$; 10) $2a+2$.

16. 1. 2) $5\vee 7=\frac{1}{2}(5+7)=6$;

4) $(2*5)*7=(2+5+2\cdot 5)*7=17*7=17+7+17\cdot 7=143$;

6) $1\vee(2\vee 3)=\frac{1}{2}(1+(2\vee 3))=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}(2+3))=\frac{1}{2}(1+\frac{5}{2})=\frac{7}{4}$.

Задания полезны и для того, чтобы учащиеся привыкали разбирать незнакомые алгоритмы и пользоваться ими.

§ 2. Преобразование выражений

Подставляем выражения вместо букв

Часто запись громоздких выражений упрощается, если выражения, входящие в них в качестве слагаемых, множителей, делимых и делителей, заменить буквами. Естественно одинаковые выражения заменяются одинаковыми буквами.

Если выражение задается словесно, то сначала его можно записать в виде более простого, но каждая буква, входящая в него, в свою очередь, также будет выражением. Например, пусть выражение R задано словесно: «сумма кубов двух чисел, поделенная на разность их квадратов, умноженных на произведение этих чисел». Требуемое выражение можно записать сначала в виде: $R=\frac{A}{B}$. A-

это сумма кубов двух чисел, т.е. a^3+b^3. Выражение B - это произведение $C\cdot D$, где $C = (a^2-b^2)$, а $D = ab$.. Окончательно получим $R=\dfrac{a^3+b^3}{(a^2-b^2)ab}$. При таком пошаговом выполнении задания, на наш взгляд, уменьшается вероятность сделать ошибку в записи выражения, легче заметить какие-то его особенности, что может быть важно при их преобразованиях.

Используем законы арифметических действий

При преобразованиях числовых выражений с применением законов арифметических действий полезно от действий с числами переходить к выражению с буквами. Например, в преобразовании выражения $4\cdot(2+3)=4\cdot 2+4\cdot 3$ заменить числа 4, 2, 3 соответственно на буквы a, b, c и получить преобразование буквенного выражения: $a(b+c)=ab+ac$. При этом нужно обратить внимание учеников, что, вместо выбранных чисел 4, 2, 3, могут стоять любые другие буквы.

Приравниваем буквенные выражения

Здесь важно обратить внимание ребят, что при преобразованиях буквенных выражений мы пользуемся только *разрешенными* правилами, которые к этому моменту известны, например законами арифметических действий. Как сказано в учебнике, запас «разрешенных» действий будет постепенно расширяться, и выражения, полученные одно из другого, с помощью «разрешенных» действий можно считать равными.

Доказываем тождество

Этот раздел является естественным продолжением предыдущего. Важно отметить, что тождество – это равенство алгебраических выражений при *всех* числовых значениях букв. Например, равенство $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$ не является тождеством, так как при $a=b$ правая часть равенства определена, а левая часть не определена, в то время как равенство $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ является тождеством. Разбор достаточного количества (в зависимости от состава класса) аналогичных примеров позволит избежать многих ошибок в будущем при решении задач.

Составляем уравнение

Хочется обратить внимание учителей на первую фразу этого раздела. Она не случайна. Уравнение – это не просто формальное равенство двух выражений с неизвестными. Математика – это не упражнения в логике и манипулировании с точно определенными объектами по формальным правилам. Фразу о том, что уравнение – это *призыв* решить определенную задачу, - это слова одного великого математика. Она гораздо точнее отражает суть дела.

В учебнике отмечаются три этапа при решении задач с помощью уравнений:

1. Составление уравнения – запись связи между известными и не известными величинами.

2. Решение уравнения – нахождение, описание всех значений неизвестных величин, удовлетворяющих уравнению.

3. Исследование уравнения. На этом этапе обсуждается, какой смысл имеют найденные решения, как они будут меняться при изменении условия задачи.

Пример. Из пункта А вышел пешеход, идущий со скоростью 5 км/ч. Через час ему вдогонку выехал велосипедист со скоростью 15 км/ч. Через сколько времени от начала движения пешехода велосипедист догонит пешехода.

Одно из решений этой задачи может быть таким:

Составление уравнения: Пусть $t-$обозначает искомое время в часах. Уравнение получится, если мы приравняем расстояние, пройденное пешеходом, к расстоянию, которое преодолел велосипедист: $5t = 15(t-1)$.

Решение уравнения: $5t = 15t - 15 \Rightarrow 10t = 15 \Rightarrow t = 1{,}5$.

Исследование уравнения: В этой задаче решение единственное. Можно сделать проверку и убедиться, что пешеход за 1,5 часа, а велосипедист за 0,5 часа преодолели одно и то же расстояние в 7,5 км.

Обратите внимание учеников на то, что при составлении уравнения иногда удобно брать за неизвестное не то, что требуется определить (скажем, время), а другую величину (скажем, скорость).

Если термин *равномерное движение* раньше не встречался, его придется объяснить.

Обсуждаем решение уравнения

Уравнение – одно из важнейших понятий в математике. Исследование уравнения, существование и единственность решений (корней) и другие вопросы, связанные с уравнениями, с этого момента сопровождают изучение не только курса алгебры, но и другие разделы математики.

Мы пока рассматриваем уравнения с одним неизвестным

Мы не рекомендуем увлекаться чрезмерным формализмом при записи решений уравнений. Не стоит заменять простую запись $x = 2$ (или иногда просто 2) теоретико-множественным обозначением $\{2\}$ или тем более $X = \{2\}$, где X – множество решений. В то же время запись $\varnothing$ вполне конкурирует с записью «корней нет».

Очень полезно (особенно для дальнейшего) приучить записывать корни (когда их более одного) в порядке возрастания, хотя этого добиться нелегко

При решении уравнений приходится

1) преобразовывать части этого уравнения,

2) переносить слагаемые из одной части в другую,

3) делить обе части уравнения на одно и то же число.

Встретившиеся в тексте слова при описании второго шага решения уравнения «перенести все члены, содержащие неизвестные, в левую часть уравнения, а все постоянные числа в правую» учениками могут восприниматься неправильно. Кроме того, стоит поговорить, что такое перенос слагаемых из одной части в другую. Мы имеем равенство двух выражений. Равенство не нарушается, если к двум равным частям прибавить одно и то же число или букву. Таким образом, если мы рассматриваем второй шаг решения, то в нем мы к обеим частям уравнения прибавили x и 15, а затем из обеих частей вычли 4. Полезно каждый раз, решая уравнение и перенося слагаемые, обозначать, что мы прибавили, а что вычли из обеих частей. Имейте в виду, что это самый первый разговор о преобразовании уравнений, и трудно рассчитывать, что материал урока будет полностью и сразу усвоен.

Вокруг теории

1. Переместительный (коммутативный), сочетательный (ассоциативный) и распределительный (дистрибутивный)

2. Тождество – это равенство алгебраических выражений при *всех* числовых значениях букв.

3. Преобразования, не меняющие значения буквенных выражений при *всех* числовых значениях букв, называются тождественными преобразованиями.

4. Уравнение – это равенство алгебраических выражений с неизвестными, которое превращается в верное числовое равенство при подстановке *некоторых* значений неизвестных, либо можно доказать, что такие значения не существуют, тождество – это равенство алгебраических выражений при *всех* числовых значениях букв.

5. Корень уравнения – это число, при подстановке которого вместо неизвестного уравнение превращается в верное числовое равенство. Решить уравнение – значит найти все его корни (или доказать, что их нет). Уравнение может иметь любое число корней – один, два, три и т. д. В исключительных случаях оно может совсем не иметь корней либо иметь их бесконечное множество (когда все числа являются его корнями).

6. Составление уравнения, решение уравнения, исследование найденных решений.

Примечание: Полезно требовать от учеников развернутые ответы на вопросы, а не такие краткие, которые мы приводим для ориентировки учителя.

Ответы и комментарии к заданиям

Преобразования выражений

1. 2) $4a^2+9b^2-18ab$; 4) $\frac{a^2}{(a+b)^2}-\frac{6a}{a+b}+4$.

Решение уравнений

5.1) Два корня $x_1=-2$; $x_2=1$; 2) Два корня $x_1=-2$; $x_2=3$;

3) Два корня $x_1=-3$; $x_2=4$; 4) Два корня $x_1=-3$; $x_2=2$;

5) Три корня $x_1=-3$; $x_2=1$; $x_3=2$; 6) Три корня $x_1=-4$; $x_2=-2$; $x_3=2$;

7) Три корня $x_1=-1$; $x_2=0$; $x_3=3$;

8) Четыре корня $x_1=-2$; $x_2=-1$; $x_3=1$; $x_4=2$; 9) Один корень $x=-1$;

10) Один корень $x=-1$.

6. $-\frac{4}{3}$;– 1; 0; 2; $\varnothing$; 2000 .

7. Можно рассуждать так. При $a=3$ получаем уравнение $5(x-3)(x+3)=x+3$. Один корень этого уравнения $x=-3$ виден сразу, так как обе части уравнения содержат множитель $x+3$, который при $x=-3$обращается в нуль. Если есть еще корень $x=b$, то, подставляя его в уравнение, получим тождество $5(b-3)(b+3)=b+3$. Будем считать, что $b\neq-3$, так как такой корень мы уже нашли. Разделим на $b+3$, получим $5(b-3)=1\Rightarrow b=\frac{16}{5}$. При $a=2$

$x_1=-3$; $x_2=\frac{9}{4}$.

8. 2) 2; 3) 0; 4) 3; 6) 1; 8) нет корней; 10) 4.

Примеры 4) и 5) даны на опережение.

15. 2) Если x – скорость течения в стоячей воде, то x + 5 – скорость парохода по течению, а x – 5– против течения. Приравниваем расстояния, пройденные пароходом по течению и против течения: $3(x+5)=5(x-5)$;

4) Время до столкновения $t = \dfrac{S}{v_1 + v_2}$. Первая галактика находится на расстоянии $S_1 = v_1 t = \dfrac{Sv_1}{v_1 + v_2}$ от начального положения. Вторая – на расстоянии $S - S_1 = S - \dfrac{Sv_1}{v_1 + v_2} = \dfrac{Sv_2}{v_1 + v_2}$.

16. 2. Требуется составить задачу на равномерное движение, которое приведет к решению уравнения: $\dfrac{x}{v} = \dfrac{S - x}{2v}$, где S, v, t обозначают соответственно путь, скорость и время.

1) Определим, какую величину задаёт *x*. Так как в правой части в числителе присутствует $S - x$, а из расстояния может вычитаться только расстояние, то x –тоже является расстоянием.
2) Определим, какие величины сравниваются в уравнении. В левой и правой частях мы видим расстояние, делённое на скорость, т.е. сравнивается время.
3) Рассматриваем отдельно левую часть: это время, за которое некто проходит расстояние *x* со скоростью *v*. Рассматриваем правую часть. Если весь путь, это *S*, то $S - x$- это расстояние, которое осталось пройти до конца пути, после того, как расстояние x уже пройдено. Итак, в правой части мы видим время, за которое некто проходит путь $S - x$ со скоростью 2*v*, то есть в 2 раза большей, чем он прошел путь *x*. Знак равенства говорит о том, что время, получающееся в левой и правой части, одинаково.
4) Получаем задачу. Некто собрался в путь, составляющий S км. Он прошёл часть пути со скоростью *v*. После этого он увеличил скорость в два раза и прошёл оставшийся путь за то же время, какое он потратил на первую часть пути. Вопрос: сколько км прошёл некто, прежде чем он увеличил скорость в два раза?

5) Полезно заметить ученикам, что уравнение – это зашифрованная история, которая заканчивается сравнением двух величин в двух различных ситуациях.

17. 1) Можно, например, составить такую задачу: Из квадратного листа картона со стороной 10 вырезали одинаковые квадратные куски по углам, а из оставшегося картона склеили коробку объемом 48. Какова высота коробки?

2) В основании коробки квадрат со стороной 10–2x; высота коробки равна x, следовательно, коробка имеет объём объем $x(10-2x)^2 = 48$.

19.

№	d	v_1	v_2	t	a
1	360	70	50	3	210
2	400	30	70	4	120
3	300	40	80	2,5	100
4	300	50	100	2	100

23. В задаче, конечно, не имеется в виду, что ученик будет решать уравнение $x^2 + 6 = (x + 1)^2 - 7$. Можно предложить посмотреть на таблицу квадратов целых чисел и найти два последовательных квадрата, отличающихся друг от друга на 6 + 7 = 13.

§3. Степень

Общий комментарий

В седьмом классе начинается систематическое использование понятия степени и подготовка к расширению этого понятия, начиная со степени с натуральным показателем. В текст параграфа включены основные сведения о действиях со степенями с натуральным показателем. При делении степеней вводятся нулевой и целый отрицательный показатели.

В соответствии с алгебраической направленностью курса никаких ограничений на основание степени не накладывается – то, что можно перемножать, то можно и возводить в степень. Разумеется, деление на нуль и его степени невозможно, поэтому 0^k не определяется для $k \le 0$, но на этом специальное внимание не акцентируется.

Если теоретическая часть этого параграфа учебника изложена кратко, то, наоборот, задачник насыщен богатым материалом, в котором стоит выделить некоторые теоретические моменты.

1. *Разложение целых чисел на простые множители*. Этот материал, знакомый учащимся из арифметики, выступает в параграфе в новом обличье: многие свойства целых чисел связаны с их представлением в виде произведения степеней простых чисел. При работе с заданиями на целые числа будут, разумеется, отрабатываться навыки действий со степенями, но одновременно расширятся знания о целых числах.

2. *Стандартная запись чисел*. Хотя этому вопросу будет посвящен специальный урок в 8 классе, уже сейчас полезно активно использовать стандартную запись, особенно при решении задач, где вычисления делаются приближенно. Разговоры об оценке погрешности здесь еще не ведутся.

3. *Рост степени и неравенства*. Эта типично «функциональная» сторона степени, тем не менее, является крайне важной и должна быть затронута здесь еще до систематического изучения свойств неравенств.

Перемножаем одинаковые числа и буквы

Учитель должен решить, добавить ли в определение то, что $a^1 = a$. Автор склонен избегать формализма и считать это само собой разумеющимся. В примере уже встречается запись первой степени. Постепенно надо приучать учащихся, что когда мы говорим «несколько» чего-нибудь, то удобно не делать исключений, когда есть только один предмет или нет их вовсе.

При разложении чисел на множители полезно обратить внимание, что, раскладывая числа с нулями на конце (типа $a00\ldots0$) можно сначала на нули не обращать внимания, а потом добавить в разложение соответствующее число двоек и пятерок.

Перемножаем степени

В этот раздел мы рекомендуем активно включать не только умножение степеней букв, но и перемножение целых чисел, разложенных в произведение простых чисел.

В заданиях впервые появляется обозначение $n!$. В задаче о числе нулей в записи числа $n!$ говорится, что оно зависит от числа пятерок в его разложении, хотя на самом деле число нулей зависит от количества *пар* пятерок и двоек, но числе $n!$ двоек всегда больше, чем пятерок, поэтому все зависит только от числа пятерок. В других аналогичных задачах надо обращать внимание на пары этих множителей.

При определении числа пятерок в разложении числа $n!$ на простые множители можно выписывать все множители (при небольших n) и непосредственно подсчитывать число пятерок. В сильном классе этот вопрос можно обсудить иначе. Каждое число, делящееся на 5, дает одну пятерку в разложении; число 25 и все делящиеся на него дают еще по одной пятерке. Аналогично числа, кратные $5^3 = 125$ будут давать еще одну дополнительную пятерку и т. д. Поэтому, например, в разложении числа 100! пятерка будет встречаться $\frac{100}{5}+\frac{100}{25} = 20 + 4 = 24$ раза, а в разложение числа 1000! пятерка входит $\frac{1000}{5}+\frac{1000}{25}+\frac{1000}{125} = = 200 + 40 + 8 = 248$ раз.

При этом, если n не делится на 5 (или 25, или 125), надо брать целую часть числа. Скажем, в число 127! пятерка входит следующее число раз:

$$\left[\frac{127}{5}\right]+\left[\frac{127}{25}\right]+\left[\frac{127}{125}\right] = 25 + 5 + 1 = 31.$$

Возводим степень в степень

В этом разделе появляется непростая методическая задача, как уберечь школьников от соблазна при возведении степени в степень возводить в степень показатель. Очень полезной при этом может быть разобранная в тексте задача про автомат и другие задачи, ей аналогичные.

Кстати, само понятие автомата как устройства, выполняющего некоторую операцию, хотя и является новым для школьных учебников, но не вызывает никаких трудностей у учеников. Они гораздо в большей степени, чем их учителя, приучены пользоваться всякими играми, где определенные действия совершаются нажатием кнопок.

Делим степень на степень

В этом разделе происходит первое знакомство с отрицательным и нулевым показателем степени. Это лишь первое знакомство, и поэтому будет преждевременным стремиться «отработать» эти понятия в полной мере. Скорее их надо использовать для придания записям более удобной и компактной формы. Есть смысл ввести разложение числителей и знаменателей рациональных чисел по степеням простых и рассмотреть умножение и деление таких выражений.

Примеры. 1) $\frac{160}{147}=\frac{2^5\cdot 5}{3\cdot 7^2}=2^5\cdot 3^{-1}\cdot 5\cdot 7^{-2}$,

2) $\frac{120}{150}=\frac{2^3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5^2}=2^2\cdot 5^{-1}$,

3) $\frac{160}{147}:\frac{120}{150}=\frac{2^5\cdot 5}{3\cdot 7^2}:\frac{2^5\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5^2}=\frac{2^5\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 5^2}{3\cdot 7^2\cdot 2^3\cdot 3\cdot 5}=2^3\cdot 3^{-1}\cdot 5^2\cdot 7^{-2}$.

Но можно и так: $2^5 \cdot 3^{-1} \cdot 5 \cdot 7^{-2} : 2^2 \cdot 5^{-1} = 2^3 \cdot 3^{-1} \cdot 5^2 \cdot 7^{-2}$.

Знакомимся со степенями с целым показателем

В этом разделе обобщаются все случаи деления степеней с натуральными показателями.

Отрицательные степени удобны для более компактной записи ответа, но часто бывает удобнее от них избавляться, перенося отрицательные степени из числителя в знаменатель и наоборот. Нулевую степень, которая может появиться при делении или умножении, обычно не пишут, заменяя, если это необходимо, единицей.

Оцениваем рост степени

По своему математическому содержанию этот раздел, конечно, является трудным. Учитель должен решить, как, в какой мере и в какой форме использовать его материал.

Ответы и комментарии к заданиям

Числовые выражения со степенями

2. 1. 1) $2^2\cdot5^2$; 3) $3\cdot13\cdot17$; 5) $2^3\cdot3\cdot5\cdot7$; 6) $2^3\cdot5^3$; 7) $3^2\cdot5^3$;

8) $2^3\cdot3\cdot7^2$; 9) $3^3\cdot5\cdot13$; 10) 2^{11}; 11) $2^5\cdot3^3\cdot7$.

3. 1) НОД $=2^2\cdot5$; НОК $=2^3\cdot3\cdot5^2\cdot7$; 3) НОД $=3$; НОК $=2^3\cdot3^3\cdot5\cdot7^2\cdot13$;

5) НОД $=3$; НОК $=3^2\cdot5^3\cdot13\cdot17$; 7) НОД $=1$; НОК$=2^2\cdot3\cdot5^2\cdot13\cdot17$; 9) НОД $=2$;

НОК $=2^{11}\cdot3\cdot7^2\cdot11^2$.

5. 1) $2^6\cdot3^3$; 3) $2^8\cdot3^4$; 5) $2^4\cdot3^4\cdot5^3$; 6) $3^7\cdot7^3$; 7) $3^4\cdot2^6$; 8) $2^{10}\cdot5^4$; 9) $2^5\cdot5^5$.

6. $54=2\cdot3^3$; $64=2^6$; $81=3^4$; $128=2^7$; $192=2\cdot3^4$; $432=2^4\cdot3^3$; 1) квадраты: 64; 81; 2) куб: 64; 3) произведение квадрата на куб: 128; 432; 4) удвоенные кубы: 54; 128; 432;

5) утроенный квадрат: 432; 6) утроенный куб: 81.

9. 1) $4\cdot10^{-3}$; 3) $6,2\cdot10^{-1}$; 5) $1,2\cdot10^{-7}$.

10. 2) $0,2^{-4}=\dfrac{1}{0,2^4}=\dfrac{1^4}{0,2^4}=\left(\dfrac{1}{0,2}\right)^4=5^4=625$; 4) $\dfrac{32}{243}$; 6) 525.

13. 1) $(a^8)^2$; 3) $(a^2b^4)^3$.

14. 1) $3^{15}=14348907$; 2) a^{11}; 3) x^6; 4) $(a+b)^{10}$; 5) a^{2n+1}; 6) $(ab)^5$; 7) $x^4y^9z^2$; 8) x^3y^2z;

9) $2^4a^6b^6=16a^6b^6$; 10) $2^{15}=32768$.

15. 1) a^{12}; 2) x^{16}; 3) a^2b^6; 4) x^9y^{15}; 5) $64x^{12}y^6$; 6) $x^8y^4z^{12}$; 7) $128a^9b^{11}$; 8) a^6b^{14};

9) $x^{13}y^{12}z^6$; 10) $x^{12}y^{12}$; 11) x^{30}; 12) $2^{17}\cdot3^{16}a^{27}b^{40}=5\ 642\ 219\ 814\ 912a^{27}b^{40}$.

Следует напомнить учащимся, чтобы они следили за тем, когда нужно показатели степеней складывать, а когда перемножать.

Полезно попросить учащихся прочесть число в последнем примере.

16. 2) a^{30}; 4) $(a+b)^{15}$; 6) x^{4n}; 8) $a^{10}b^{11}$; 9) a^{8}.

17. 1) a^4; 2) x^6y^4; 3) xz; 4) $4a^4b^4$; 5) a^2; 6) $a^2b^5c^9$; 7) $3x^5y^3$; 8) 1.

18. 1) x^2y^{-1}; 3) $10x^{-1}y^{-1}$.

19. 1) 1; 2) $2^9=512$; 3) 1; 4) $(a+b)^{-3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$; 5) a.

21. 2) $(a+2)^3$**;** 4) $(x+2)^3+2$;

6) $(A\circ B\circ A)(x)=(A\circ B)(x^3)=A(x^3+2)=(x^3+2)^3$.

22. 2. а) $(A\circ A\circ B)(a)=$ $(B\circ A\circ A)(a)$; б) $(B\circ A\circ B\circ A)(a)$;

в) $(A\circ A\circ A\circ A)(a)$; г) При возведении в квадрат степень растет быстро, поэтому нужно по возможности использовать автомат $A: a\to a^2\to a^4\to a^8$. Больше возводить в квадрат нельзя, поэтому придется 2 раза использовать автомат B. Всего автоматы будут использованы 6 раз. Но можно рассуждать иначе: $a^{20}\leftarrow a^{10}\leftarrow a^5$. Получить a^5 можно, применив 2 раза автомат A и один раз B, следовательно, можно поступить так: $(A\circ A\circ B\circ A\circ A)(a)$, т.е. использовать автоматы 5 раз.

24. 1) 111; 2) 22^2; 3) 3^{3^3}; 4) 4^{4^4}; 5) 5^{5^5}.

25. 2) $2^{10}>10^3\Rightarrow 2^{20}>10^6$; 4) Вариант: $\pi^2<10\Rightarrow \pi^{12}<10^6<2^{20}<2^{21}$.

Число π может оказаться новым для учащихся. На это стоит обратить внимание.

§4. Одночлен

Общий комментарий

С этого параграфа фактически начинается систематическое изучение алгебры в школе. Мы хотим обратить внимание учителя на объективно существующие трудности в теоретической части курса. Они касаются двух «болевых точек» – определений рассматриваемых объектов и действий над ними (одночлен, многочлен, дробь и т. п.) и использования знака равенства при проведении преобразований. На наш взгляд преодолеть эти трудности в полной мере в школе невозможно и не нужно. Тем не менее, определенная аккуратность и осторожность, даже если она останется скрытой для учащихся, необходима. Могу сказать, что многие нелепости, которые можно, например, наблюдать при решении уравнений в старших классах, имеют своими корнями неверные установки в изучении алгебры в основной школе. Приемлемая для школы алгебраическая точка зрения на алгебру многочленов может быть представлена следующим образом.

Исходным понятием является понятие *выражения*. Выражение – это числа и буквы, соединенные знаками действий. (Эта привычная фраза уже неточна: $ab + cd$ несомненно является выражением, но знак + не соединяет числа или буквы, а соединяет выражения. Выход будет предложен чуть ниже.) В зависимости от того, какие действия нужно произвести, могут рассматриваться рациональные, иррациональные, логарифмические и т. п. выражения. Выражения, составленные неодинаково, по-разному, считаются различными. Так, выражения $2x + x$, $3x$, $x + 2x$ не совпадают между собой.

Ограничимся рассмотрением целых рациональных выражений, то есть выражений, в которых числа и буквы соединены знаками сложения, вычитания и умножения. Встречающееся в целых выражениях деление на число мы считаем умножением на обратное число.

Более точно можно следовать индуктивному определению, данному в тексте:

1. Всякая буква и всякое число являются выражениями.
2. Если A и B – выражения, то $A + B$ и $A \cdot B$ также являются выражениями.

Тем самым в множестве (целых) выражений определены две операции – сложение и умножение. Исходя из определения, нельзя извлечь никаких привычных свойств этих операций, в частности, мы вынуждены считать $A + B$ и $B + A$ разными выражениями. Мы молчаливо принимаем, что сложение и умножение выражений являются коммутативными и ассоциативными операциями, то есть пишем, не задумываясь, *равенства* типа $A + B = B + A$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = (B \cdot A) \cdot C$ и т. п. Какой же смысл имеют равенства такого типа? Математика умеет обращаться с появившейся трудностью (с помощью введения отношений эквивалентности и понимания равенства как принадлежности объекта одному и тому же классу эквивалентности). В школе вместо этого широко используется понятие *преобразования* выражений. Обычно этому понятию не дается точного определения, но на деле фиксируется некоторый набор разрешенных преобразований и запись равенства выражений типа $A = B$ понимается так, что выражение B получено из выражения A цепочкой разрешенных преобразований. Такой подход является вполне строгим и достаточно разумным (надо единственно следить за тем, чтобы разрешенные преобразования были обратимы). Он позволяет не сразу указывать разрешенные преобразования, а вводить их постепенно, по мере надобности.

К рассматриваемому моменту мы считаем разрешенным использование всех обычных законов, верных для арифметических действий над числами.

Составляем одночлен

Среди выражений мы выделяем некоторые их классы – одночлены, многочлены, дроби и т. п. Одночлен мы определяем как выражение, полученное умножением числа и степеней *различных* букв (понимая степень как сокращенную запись произведения нескольких экземпляров одной и той же буквы). По этому определению одночлены $2x^2y$, $2yx^2$, $x^2y \cdot 2$ являются различными, а выражение $2xyx$ не является одночленом. На всем этом не нужно акцентировать внимание учащихся. Советуем даже избегать задавать учащимся вопрос, что такое одночлен, а лучше спрашивать, как составляется одночлен. Равенства $2x^2y = 2yx^2 = x^2y \cdot 2$ разрешены как следствие применения законов арифметики. Теперь мы выбираем некоторые *стандартные записи* одночленов, и становится осмысленной задача приведения одночлена к стандартному виду. В частности, произведение одночленов (если его понимать как произведение выражений) есть выражение, которое разрешенными преобразованиями можно привести к одночлену, записанному в стандартном виде, поэтому мы смело пишем равенство $2xyx = 2x^2y$. Первые две строки следующего раздела в точности соответствуют указанному процессу (разумеется, освобожденному от всех умствований, которыми мы сейчас занимались).

Продолжение начатого разговора мы отложим до действий над многочленами.

Перемножаем одночлены

При умножении одночленов надо обратить внимание на числовой коэффициент. Например, при умножении нескольких одночленов надо выделить в каждом из них числовой коэффициент, перемножить их и записать результат. Лишь потом обратиться к умножению букв.

При умножении нескольких одночленов не стоит сначала умножать первые два, а затем результат – на третий и т. д. Лучше приучать сразу «собирать» ответ.

Складываем подобные одночлены

Обратим сейчас внимание еще на одну выдержку из учебника (вообще типичную для школьных текстов):

«Подобные одночлены можно складывать. Для этого надо сложить их числовые коэффициенты и сохранить нетронутыми степени букв.»

Первую часть этой выдержки надо понимать так, что сумму подобных одночленов (понимаемую как выражение) можно преобразовать к одночлену. Вторая фраза указывает, какое преобразование нужно при этом сделать. Скажем, равенство $x + 3x = 4x$ можно понимать как применение следующих преобразований:

$x + 3x = 1 \cdot x + 3 \cdot x = (1 + 3) \cdot x = 4x$.

(Заметьте, что кроме разрешенного преобразования $(1 + 3) \cdot x = = 1 \cdot x + 3 \cdot x$ использованы еще два, которые негласно тоже признаны разрешенными: $1 \cdot x = x$ и замена $1 + 3$ на 4, т. е. выполнение известных операций над числами.)

Делим одночлены

На этапе знакомства с операцией деления (неважно, что мы делим – числа, одночлены, многочлены) мы для удобства разделяем понятия целое и дробь. Надо понимать, что это разделение условное – в дальнейшем всегда целые выражения рассматриваются как частный случай дробных. Поэтому вряд ли стоит очень акцентировать противопоставление целого и дроби. Почему выражение (буквенное) $\frac{2}{3}ab$ мы считаем целым, а выражение (числовое) $\frac{2}{3}$ считаем дробным?

Беседа. Знакомимся с историей алгебры.

Решение уравнения $x^2-8x=20$ способом Аль-Хорезми.

Рисуем квадрат со стороной x. От него с двух противоположных сторон отрезаем полоски площадью $2x$, т.е. каждая полоска имеет ширину 2. Теперь у нас получился прямоугольник, одна сторона которого равна x, а вторая – $x-4$. Отрежем еще две полоски шириной 2, но с узких сторон. У нас останется квадрат, площадь которого равна $x^2-4x-4(x-4)=x^2-8x+16$. Так как $x^2-8x=20$, то $x^2-8x+16=36$, а тогда сторона оставшегося квадрата равна 6, откуда следует, что $x=10$.

При первом знакомстве с числами Фибоначчи важно просто посмотреть на них, выписав достаточно длинную последовательность). В вопросах о числах Фибоначчи *не предполагалось* доказательств. Достаточно будет эмпирических наблюдений и догадок. Они простые: четные числа имеют номера, кратные трем, числа, делящиеся на 3, имеют номера, кратные 4; числа, кратные 5, имеют номера, кратные 5. При этом, не забудьте, что нумерация началась с нуля ($a_0=0, a_1=1$).

Сюжеты и проекты.

Сюжет 1. ***Десятичная запись натуральных чисел***

1) $a10^2 + a10 + a = 111a$; 2) $101a + 20b + 101c$; 3) $1001a + 100b + 10c$;

4) $a \cdot 10^3 + (a+1) \cdot 10^2 + (a+2) \cdot 10 + a + 3 = 1111a + 123$;

5) $\overline{abb} + \overline{bab} + \overline{bba} = 111a + 222b$.

Сюжет 3. ***Автомат***

1) Задание похоже на 24 из раздела «Автоматы».

Начинаем рассуждения с конца, каждое действие единственно возможно, если критерием его является скорость достижения цели. Только в том случае, когда нельзя применить автомат A, мы применяем автомат B: $10^{100} \leftarrow 10^{50} \leftarrow 10^{25} \leftarrow 10^{24} \leftarrow 10^{12} \leftarrow 10^6 \leftarrow 10^3 \leftarrow 10^2 \leftarrow 10 \leftarrow 1$, т. е. решение имеет вид: $10^{100} = (B \circ A \circ B \circ A \circ A \circ A \circ B \circ A \circ A)(1)$;

2) Здесь то же рассуждение уже не пройдет, так как с помощью самого «сильного» автомата C нельзя получить 10^{100}, только после применения автомата B к 10^{99}, которое может быть получено с помощью C: $10^{100} \leftarrow 10^{99} \leftarrow 10^{33} \leftarrow 10^{11}$. Ближайшая к 10^{11} степень, которая может быть получена с помощью автомата C, 10^9, но, для того чтобы ее получить, нужно дважды применить автомат B: $10^{11} \leftarrow 10^{10} \leftarrow 10^9 \leftarrow 10^3 \leftarrow 10 \leftarrow 1$. Другой вариант: $10^{11} \leftarrow 10^{10} \leftarrow 10^5 \leftarrow 10^4 \leftarrow 10^2 \leftarrow 10 \leftarrow 1$, но он оказался длиннее.
Окончательно: $10^{100} \leftarrow 10^{99} \leftarrow 10^{33} \leftarrow 10^{11} \leftarrow 10^{10} \leftarrow 10^9 \leftarrow 10^3 \leftarrow 10 \leftarrow 1$, т.е.
$10^{100} = (B \circ C \circ C \circ B \circ B \circ C \circ C \circ B)(1)$

3) Похоже на 1), только в памяти должно быть число 10, умножением на которое мы заменим действие автомата B: $10^{100} = (E \circ A \circ E \circ A \circ A \circ A \circ E \circ A \circ A \circ D)(10)$;

4) $10^{100} = (F \circ F \circ C \circ F \circ F \circ C \circ C \circ F \circ F \circ C \circ F \circ C)(10)$

Сюжет 4. ***Объем Земли***

1) $\approx 1{,}1\cdot 10^{21}$; 2) $\approx 5{,}5\cdot 10^{3}$; 3) $3{,}3\cdot 10^{4}$; 4) $\approx 4{,}8\cdot 10^{-4}$.

Проект 1. ***Переливание из пустого в порожнее***

Ответы на заключительные вопросы.

1. Нет, мы знаем, что $a_{n+1} + b_{n+1} = 2$.

2. Да.

3. В первом оно уменьшается, во втором увеличивается.

4. С тысячного шага.

Предполагается, что для ответов достаточно численных экспериментальных наблюдений. Приводим точные вычисления для учителя.

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{n+1}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} \dfrac{n}{n+1}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 1, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

$\dfrac{n+2}{n+1} = 1 + \dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{n}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Отсюда ясен ответ на вопросы 3 и 4.

Проект 2. ***Двоичная система счисления***

По опыту учителей можно сказать, что эта исследовательская работа оказалась самой легкой (были даже просьбы усложнить ее). Тем не менее, некоторые вопросы, например заключительные, могут оказаться для учащихся затруднительными.

Ответы на заключительные вопросы:

10. Десять: $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$.

11. Семь: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729.

Проект 3. ***Китайская игра Янь***

Таблица проигрышных ситуаций $a^k b^l$, $k < l$

k	l	k	l	k	l
1	2	12	20	24	39
3	5	14	23	25	41
4	7	16	26	27	44
6	10	17	28	29	47
8	13	19	31	36	49
9	15	21	34	32	52
11	18	22	36	33	54

В таблице должны встречаться по одному разу все числа и все разности между ними. В таблицу попадут парами все числа Фибоначчи.

Математический кружок

Решение задач, предлагаемых на занятиях математического кружка, интересно не только тем, что учащиеся узнают что-то новое, что не вошло в основной курс алгебры, но и тем, что большинство задач требует рассуждений и доказательств. Научить аргументировать свои высказывания, формулировать и доказывать утверждения – одна из важнейших задач курса математики.

Занятие 1. ***Простые и составные числа.***

Серия 1**.** *Вводные задачи.*

5. Рассмотрим остаток от деления числа p на 3. Так как $p > 3$ и простое, то остаток от деления числа p на 3 может равняться 1 или 2. Тогда остаток от деления p^2 на 3 равен 1, а остаток от деления p^2+2 на 3 равен 0 (1+2=3 – делится на 3), следовательно, число p^2+2 составное.

Серия 2*. Простые числа.*

1. Рассмотрим остаток от деления числа p на 3. Он может равняться 0, 1 или 2. Если остаток от деления p на 3 равен 1, то число $p+14$ не может быть простым (остаток от деления на 3 будет равен 0); если остаток от деления p на

3 равен 2, то число $p+10$ не может быть простым (остаток от деления на 3 будет также равен 0). Таким образом, число p делится на 3, а так как оно простое, то $p=3$.

2. Аналогично $p=3$.

3. $p=5$**.**4. $p=3$. *Указание.* Было выше показано, что при $p>3$ число p^2+2 составное**.** Следовательно, либо $p=2$, либо $p=3$. Проверка показывает, что $p=3$.

5. Докажем утверждение для $n+1$. Предположим противное, что $n+1=k^2 \Rightarrow n=k^2-1$. Число $n-$четное, так как среди его множителей есть число 2, тогда k^2-число нечетное, следовательно, $k-$тоже нечетное. Пусть $k=2m-1 \Rightarrow k^2=4m^2-4m+1 \Rightarrow n=4m^2-4m$, т.е. делится на 4, в то время как произведение первых простых чисел на 4 не делится. Противоречие!

Для $n-1$ приведенное доказательство не пройдет. Будем рассуждать иначе. Число $n>2$, тогда n делится на 3 и $n=3k$, причем $k-$четное, но тогда, если мы предположим, что $m^2=n-1=3k-1 \Rightarrow m^2+1=3k$. Следовательно, m^2 при делении на 3 должно давать остаток 2, что невозможно (квадрат числа при делении на 3 может давать остаток 0 или 1).

6. Наименьшее число имеет вид $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, при этом показатели степени a,b,c должны удовлетворять условиям: a делится на 3 и 5, $a-1$делится на 2; b делится на 2 и 5, $b-1$ делится на 3; c делится на 2 и 3, $c-1$делится на 5, отсюда легко следует, что a,b,c равны соответственно 15, 10 и 6, и искомое число равно $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$.

7. Предположим, что число $2^n-1=p-$ простое. Так как $n>2$, то число p можно представить в виде $p=3k+1$ или $p=3k+2$. В первом случае $2^n-1=3k+1 \Rightarrow 2^n+1=3k+3$ – составное число (делится на 3). Второй случай невозможен, так как $2^n-1=3k+2 \Rightarrow 2^n=3k+3$. Если число $2^n+1=p$ – простое, то рассуждения аналогичны.

Серия 3. Разложение на простые множители

В заданиях впервые появляется обозначение $n!$.

1. 1) 2, 3, 5, 7; 2) 4;

3) Число нулей зависит от количества *пар* пятерок и двоек. В числе $n!$ двоек всегда больше, чем пятерок, поэтому все зависит только от числа пятерок. В других аналогичных задачах надо обращать внимание на пары этих множителей.

При определении числа пятерок в разложении числа $n!$ на простые множители можно выписывать все множители (при небольших n) и непосредственно подсчитывать число пятерок. В сильном классе этот вопрос можно обсудить иначе. Каждое число, делящееся на 5, дает одну пятерку в разложении; число 25 и все делящиеся на него дают еще по одной пятерке. Аналогично числа, кратные $5^3 = 125$ будут давать еще одну дополнительную пятерку и т. д. Поэтому, например, в разложении числа 100! пятерка будет встречаться $\frac{100}{5}+\frac{100}{25} = 20 + 4 = 24$ раза, а в разложение числа 1000! пятерка входит $\frac{1000}{5}+\frac{1000}{25}+\frac{1000}{125} = = 200 + 40 + 8 = 248$ раз. При этом, если n не делится на 5 (или 25, или 125) надо брать целую часть числа. Скажем, в число 127! пятерка входит следующее число раз:

$\left[\frac{127}{5}\right]+\left[\frac{127}{25}\right]+\left[\frac{127}{125}\right] = 25 + 5 + 1 = 31$.В число 10! 5 входит 2 раза, т.е. число оканчивается двумя нулями; 4) $2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$.2. 1) 12; 4; 2; 1; 2) 29. 3. а) 10; б) 9.4. а)16, б) Рассмотрим сначала множители, которые меньше p^2. Множитель p содержат те из них, которые имеют вид: $mp \le n \Rightarrow m = \left[\frac{n}{p}\right]$. Рассмотрим множители, которые больше p^2. Тогда множители $kp^2 \le n$ содержат еще по одному множителю p. Таких множителей будет $\left[\frac{n}{p^2}\right]$. Степень, в которой входит число p, будет равна $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]$.

Занятие 2. ***Десятичная запись числа и признаки делимости***

Цикл задач на последнюю цифру степени основан на важном свойстве остатков от деления степеней на фиксированное число n (по модулю n). Последняя цифра числа – это остаток от деления на 10. Первый важный принцип: при арифметических действиях над целыми числами, если мы интересуемся только остатком от деления на n, часто полезно брать наименьший по модулю остаток, т. е. вместо 8 брать –2 по модулю 10, вместо 6 брать –1 по модулю 7 и т. п.

Далее, надо помнить, что остатки степеней повторяются периодически. Если a взаимно просто с n, то в последовательности остатков чисел a^1, a^2, a^3, … обязательно встретится 1 и определит длину цикла. Так по модулю 10 (т. е. числа с одинаковой последней цифрой) периоды таковы:

число	длина периода
1	1
3	4
7	4
9	2

Из теории известно, что длина периода является делителем числа $\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ – число чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Так, $\varphi(10) = 4$, $\varphi(p) = p$, где p – простое число, $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$ и т. п.

Остатки степеней чисел, не взаимно простых с n, тоже повторяются периодически, но там не встретится единица.

<u>Серия 2. *Последняя цифра степени.*</u>

1. Последняя цифра числа 1998^{1998} такая же, как у числа 8^{1998}. Последней цифрой числа 8^n могут быть 8, 4, 2, 6. Число 1998 = 499·4+2, следовательно, последняя цифра 4.

2. Последняя цифра у каждого числа 7, следовательно, у разности 0.

3. $30=31-1\Rightarrow 30^{99}=31n-1$(число 30 при делении на 31 имеет остаток –1, поэтому число 30^{99} имеет также остаток –1, т.е. может быть представлено в виде $31n-1$); аналогично $61=2\cdot 31-1\Rightarrow 61^{100}=31\cdot m+1$. Остальное ясно.

4. Доказывается аналогично, если положить 43 = 66 –23.

5. Рассмотрим последние две цифры числа 7^n: 07; 49; 43; 01; 07; 49; 43; 01…. Число 7^7имеет такие же две последние цифры, как 7^3, т.е. 43; число 7^{7^7} имеет также последними цифрами 43, а тогда и число $7^{7^{7^7}}$ имеет такие же две последние цифры, следовательно, $7^{7^{7^7}}$ - 7^{7^7} имеет две последние цифры. равные 0, т.е. эта разность делится на 100.

<u>Серия</u> <u>3</u>. Десятичная запись

1. Если последняя цифра квадрата числа равна 6, то последняя цифра самого числа равна 4 или 6. Пусть искомое число равно $10n+4\Rightarrow(10n+4)^2=100n^2+80n+16=10(10n^2+8n+1)+6$. Предпоследней цифрой будет остаток от деления $8n+1$на 10 –нечетное число. Аналогично рассматривается число $10n+6$.

2. Например, 1111….11599125 – в нем 94 единицы.

3. Здесь нужно воспользоваться важным свойством остатков: остаток от деления суммы (произведения) чисел на некоторое число p не изменится, если мы одно из этих чисел или оба заменим их остатками от деления на это же число p. Например, остаток от деления числа 39 на 4 равен 3, остаток от деления числа 26 на 4 равен 2, остаток от деления числа 39+26 на 4 равен 1, остаток от деления чисел 3+2, 3+26, 39+2 на 4 также равен 1. То же самое легко проверить для произведения чисел. Исходя из этого, получаем, что остаток от деления числа $A=a_n10^n+a_{n-1}10^{n-1}+...+a_1 10+a_0$ на 9 будет таким же, как и при делении на 9 суммы цифр числа A. Взяв теперь сумму цифр в качестве нового числа и разделив его 9, получим в остатке такое же число, как и при делении его суммы цифр на 9. Продолжая этот процесс, мы будем получать одинаковые остатки при делении на 9, пока не получим однозначную сумму цифр. Она и

будет равна остатку от деления исходного числа на 9. Остатки от деления числа 2^n на 9, в зависимости от n, могут быть равны 2, 4, 8, 7, 5, 1. Представим число $n = 6m + s$, тогда остаток от деления $2^n = 2^{6m+s}$ на 9 равен остатку от деления 2^s на 9, т.е. одному из чисел 2,4,8,7,5,1, имеющему номер s. Но это и есть искомая сумма цифр, ставшая однозначным числом.

2. Эта задача намного трудней предыдущих. Написанные числа не обязательно имеют одинаковые остатки при делении на 41. Чтобы уничтожить больше цифр, умножим одно число на 10 и вычтем из него второе: $10 \cdot \overline{abcde} - \overline{bcdea} = a \cdot 1\,000\,000 - a = a \cdot 99999$. Число 99999 делится на 41, так как $99999 = 41 \cdot 2439$. Число $10 \cdot \overline{abcde}$ можно записать так: $\overline{abcde0}$ и дальше вычитать столбиком:

$$\begin{aligned} \overline{abcde0} &= \overline{a00000} + \overline{bcde0}, \\ \overline{bcdea} &= \qquad\quad a + bcde\bar{0}. \end{aligned}$$