Глава 5 «Уравнения»

Методический комментарий к главе, советы и решения некоторых заданий к главе по параграфам.

(Материал взят из «Книги для учителя» к учебникам по алгебре М.И. Башмакова, 7 – 9 класс, издательство «Бином. Лаборатория знаний»)

§1. Линейное уравнение

Общий комментарий

Развитие теории уравнений как одной из основных содержательных линий курса математики надо вести, на наш взгляд, очень осторожно, накапливая практический опыт решения уравнений и разумно сочетая его с теоретическим осмыслением производимых действий.

К концу седьмого класса, к которому относится обсуждаемый нами текст, ученики имеют определенный опыт составления уравнений, решения линейных уравнений, знакомы с понятием «корень уравнения». Основное назначение темы, включенной в учебник 7 класса, состоит в следующем:

- закрепить понятие корня уравнения;
- расширить запас уравнений, решаемых сведением их к линейным с помощью разложения на множители и замены неизвестного;
- познакомить с рациональными уравнениями, преобразования которых к линейным уравнениям может привести к появлению «посторонних корней», научив при этом алгоритму отсеивания этих корней;
- систематизировать способы решения линейных систем с двумя неизвестными;
- начать знакомство с геометрической интерпретацией линейных систем и их исследованием на геометрическом языке.

Как вы видите, мы не вводим понятия равносильности и считаем пока преждевременным обсуждение логики решения уравнений и систем. Мы говорим, что стараемся привести уравнение к линейному цепочкой преобразований, но не уточняем, какой список (или тип) преобразований мы разрешаем и что происходит с множеством корней при совершаемых преобразованиях. Решая уравнение, мы делаем цепочку преобразований – переходов от одного уравнения к другому. В тексте эти уравнения отделены друг от друга запятыми.

Для важнейшего нового преобразования – освобождение рационального уравнения от знаменателей и переход к многочленам – мы предлагаем традиционную технику: нахождение корней всех знаменателей, запись области допустимых значений (ОДЗ) уравнения, проверку попадания найденных корней многочленного уравнения в ОДЗ.

Заметим, что ни одно из применяемых преобразований не может привести к «потере корней», поэтому такой случай мы откладываем на будущее, лишь делая предупреждение о недопустимости сокращения обеих частей уравнения на общий множитель.

Решаем уравнения, приводящиеся к линейным

Как решать уравнение типа $(2x - 1)(x + 1) = (x + 2)(x + 1)$? Можно перенести все в одну часть и разложить на множители: $(2x - 1)(x + 1) - (x + 2)(x + 1) = (x + 1)(2x - 1 - x - 2) =$ $= (x + 1)(x - 3)$. Но можно сначала приравнять нулю очевидный общий множитель ($x + 1 = 0$), найти его корень, а потом сократить обе части уравнения на $x + 1$ и получить второе уравнение $2x - 1 = x + 2$. Как лучше поступить должен решить учитель. Второй способ используют реже, возможно для того, чтобы предохранить учащихся от привычки сокращать множители, не приравнивая их к нулю. На наш взгляд, второй способ предпочтительнее – пусть лучше ученики думают перед каждой операцией (и, возможно, делают ошибки), чем приучаются слепо следовать стандартному алгоритму.

Вокруг теории

Ответы на вопросы:

1. См. выделенный текст на стр. 220.
2. Приравниваем к нулю каждый множитель и записываем в ответ все найденные корни.
3. Один корень, ни одного или бесчисленное множество.
4. Если коэффициент $a \neq 0$ в уравнении $ax = b$.
5. См. выделенный текст на стр. 222.
6. Найденные решения рационального уравнения не должны быть корнями ни одного из знаменателей. Корни знаменателя не являются допустимыми значениями.
7. Сделать проверку и убедиться, что найденное решение является корнем рационального уравнения, или проверить, что оно не является корнем ни одного из знаменателей.
8. Перенести обе части уравнения в одну сторону, разложить на множители и затем приравнять каждый множитель нулю.

Если обе части уравнения содержат общий множитель, надо перенести все члены уравнения в одну часть, вынести общий множитель и не забыть приравнять его нулю, затем оставшуюся часть разложить на множители и приравнять нулю каждый из полученных множителей.

Ответы и комментарии к заданиям

2. 6) $x = -\frac{22}{3}$; 7) $x = 6$; 8) $x = -18$; 9) $x = -\frac{3}{2}$; 11) $x = -1$; 12) $x = -2$, в учебнике опечатка: после x^2 стоит знак равенства; 13) $x = \frac{1}{6}$; 14) $x = \frac{1}{3}$; 15) $x = 100$; 16) $x = -\frac{1}{2}$.

3. 1) $x = \frac{a}{6}$; 3) $x = \frac{3a}{a-1}$, при $a = 1$ корней нет; 5) $x = 4a$; 7) $x = \frac{4y-12}{3}$; $y = \frac{3x+12}{4}$; 9) $x = 7y$; $y = \frac{x}{7}$; 10) $x = \frac{9-5y}{8}$, $y = \frac{9-8x}{5}$.

4. 1) $x = -\frac{5}{2}$; 3) $x = \frac{11}{3}$; 5) $x = 3$.

6. 1) ОДЗ: $x \neq 4, x \neq 5, x = 6$; 3) ОДЗ: $x \neq \pm 3, x = -15$; 5) ОДЗ: $x \neq \frac{1}{2}$, решений нет; 7) ОДЗ: $x \neq -3, x \neq 1, x \neq 2$, решений нет; 8) ОДЗ: $x \neq 0, x \neq \pm 1, x = 10$;

9) ОДЗ: $x \neq -2, x \neq 0, x \neq 1$, $x = 10$; 10) $x \neq -1, x \neq 5, x = -13$.

7. 1) $x_1 = -2, x_2 = \frac{3}{2}$; 3) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$; 4) $x_1 = -4$, $x_2 = 0$;

5) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 6) $x = \pm 3$; 7) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 8) $x_1 = -3$, $x_2 = -2$; 9) $x = 0$, $x_3 = 2$;

11) $x_1=3,\ x_2=5$; 12) $x_1=-3,\ x_2=2$; 14) $x_1=-7,\ x_2=0,\ x_3=1$ (раскрыть скобки слева, перенести обе части в одну сторону и разложить на множители); 15) $x=0$; 16) $x=6$;

18) после перенесения всех дробей в одну часть и приведения к общему знаменателю получим рациональную дробь $\dfrac{3x^2-17x+20}{(x-2)(x-4)}=0$, раскладываем числитель на множители: $3x^2-17x+20=3x^2-5x-12x+20=(3x-5)(x-4)$, учитывая ОДЗ, получим $x=\dfrac{5}{3}$;

19) решается аналогично, $x=10$; 20) $\dfrac{5}{2}$.

8. 1) а) да; б) единственный корень; 2) а) нет; б) единственный корень; 4) а) да; б) единственный корень; 5) а) да; б) единственный корень; 7) а) да; б) бесконечное множество корней; 8) а) нет; б) не имеет корней; 9) а) да; б) имеет два корня; 10) а) да; б) единственный корень.

9. 1) $x_{1,2}=\pm 1, x_{3,4}=\pm 2$; 3) $x_1=0,\ x_2=4$; 5) $x=-\dfrac{2}{3}$; 7) ± 2; 8) $x_1=\dfrac{5}{3}, x_2=\dfrac{6}{5}$;

9) $2x+3\neq 0$, разделим на $\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)^2-5\dfrac{x-1}{2x+3}+6=0 \Rightarrow x_1=-\dfrac{7}{3}; x_2=-2$;

10) $x=-\dfrac{1}{2}$.

10. Метод замены неизвестного – это основной способ поиска путей решения уравнения. Приобрести необходимый навык достаточно трудно, и не надо рассчитывать на быстрый успех. Большую роль играет количество решенных упражнений. Поэтому стоит обратить внимание на серии упражнений, в которых предлагается найти замену неизвестного, упрощающую вид уравнения, не решая само уравнение.

1) $y=x^2$; 3) $y=x-\dfrac{1}{x}$; 5) $y=x+\dfrac{1}{x}$; $y^2+2y-3=0$;

7) $y=x^2+3x+5,\ y-5-\dfrac{9}{y}=-1$; 9) $y=x^2+4x+3;\ y(y+1)=72$;

11) $y=x^2+x+1,\ y^2+2y=4$; 13) $y=x-\dfrac{1}{x},\ y^2+3y=2$.

11. 1) $t-$время в пути первого пешехода, $t-2-$время в пути второго пешехода, $4t=6(t-2)\Rightarrow t=6,\ S=24$ км; 3) $S-$расстояние между городом и деревней, $\dfrac{S}{2\cdot 3}+1-$ время, которое потратил пешеход на первую половину пути, $\dfrac{S}{2\cdot 4}-$ потратил пешеход на вторую половину пути, $\dfrac{S}{3}-$расчетное время, $\dfrac{S}{2\cdot 3}+1+\dfrac{S}{2\cdot 4}=\dfrac{S}{3}$, $S=24$ км; 5) первый автомобиль прошел до выхода второго at км, за час второй автомобиль уменьшает расстояние на $(b-a)$ км, значит, он догонит первый автомобиль через $\dfrac{at}{b-a}$ часов.

§ 2. Линейные системы уравнений

Обсуждаем понятие линейной системы

В этом разделе важно, чтобы учащиеся усвоили, что

1) в каждом уравнении системы одночлены, содержащие неизвестные, входят только в первой степени,

2) одно решение системы двух уравнений с двумя неизвестными – это пара чисел (x, y),

3) как правило, система двух уравнений с двумя неизвестными имеет одно решение, но могут быть исключения, когда система неопределенна или несовместна.

Мы предлагаем использовать термины *несовместная система* и *неопределенная система*. Их смысл понятен и не требует специального запоминания. Наша точка зрения такая: не все логически возможные случаи равноправны – есть главный случай (система имеет единственное решение) и исключения, поэтому большинство упражнений соответствует случаю, когда система имеет одно решение.

Решаем линейные системы методом подстановки

В учебнике дан пошаговый алгоритм решения системы уравнений. Обычно этот метод не вызывает затруднений. В этом алгоритме неопределенным является первый шаг – из какого уравнения и какое неизвестное надо выражать через другое, и эта проблема обсуждается в учебнике.

Решаем линейные уравнения методом сложения.

Метод сложения мало отличается от метода подстановки.

Упражнения на закрепление решения систем с двумя неизвестными методом сложения стандартные, кроме них предлагается решить системы линейных уравнений с тремя неизвестными. Особенно хорошо работает метод сложения для систем из трех уравнений с тремя неизвестными, когда система симметрична. Например, решая систему

$$\begin{cases} 0 + y + z = 7 \\ x + 0 + z = 6 \\ x + y + 0 = 5 \end{cases},$$

сначала надо сложить все уравнения и найти сумму $x + y + z = 9$, а затем из этой суммы вычитать каждое из данных уравнений: $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$.

Решаем системы, приводящиеся к линейным

Так же, как и при решении уравнений методом замены переменной, знакомство с такими методами проводится на примерах. Единого алгоритма здесь нет. Каждая система требует индивидуального подхода. Теоретическая опора – это равносильные преобразования уравнений или системы.

Мы снова возвращаемся к методу замены неизвестных. И снова полезно «набить руку» в поиске подходящей замены, не доводя решение системы до конца. Конечно, к решению систем мы еще вернемся в 8-9 классах.

Находим уравнение прямой

Эта тема является завершающей в главе. Нахождение уравнения прямой по различным данным обычно сводится к решению линейной системы, поэтому этот материал можно рассматривать как приложение линейных систем. Этот материал является ознакомительным. Советуем рассмотреть геометрическую иллюстрацию решения систем линейных уравнений и, если будет позволять время, познакомить учащихся с графическим способом решения системы линейных уравнений. Для этого можно использовать материал сюжетов 137 и 138 из рабочих тетрадей. На всякий случай, приводим его в конце комментария.

Вокруг теории

Ответы на вопросы

1. Линейная система – это несколько линейных уравнений вместе с задачей найти ее решения.

2. Решение системы – это набор значений неизвестных, которые являются решениями каждого из уравнений системы (см. выделенный текст на стр.230).

3. Несовместная система – это система, которая не имеет ни одного решения.

4. Неопределенная система – это система, которая имеет более одного решения. Как правило, при этом число решений бесконечно.

5. См. выделенный текст на стр.232.

6. Мы получим невозможное (неверное) числовое равенство (типа 1 = 0).

7. Мы получим тождественное числовое равенство (типа 0 = 0).

8. Уравнение прямой следует искать в виде $y = kx + l$. Для нахождения неизвестных коэффициентов k и l надо подставить в уравнение координаты двух данных точек и решить полученную линейную систему.

Ответы и комментарии к заданиям

1. 1) $x-$скорость течения реки, $y-$скорость парохода в стоячей воде, $\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b \end{cases}$

2) $x-$скорость течения реки, $y-$скорость парохода в стоячей воде, $\begin{cases} x+y=\dfrac{d}{t}, \\ x-y=\dfrac{d}{t-a} \end{cases}$

3) $x-$первое число, $y-$второе число, $\begin{cases} x-3=3(y-3), \\ x+2=2(y+2) \end{cases}$

2. 1) (1; –1); 3) (1; –1); 5) (1; 1); 7) (–22; 10); 9) (3; –2).

3. 1) (1; 1; –1), можно записать $x=1,\ y=1,\ z=-1$; 2) (–1; –2; 4); 3) $(3;\frac{3}{2};\frac{3}{2})$; 4) (3; 2; 0)

Задачу 3 можно рассматривать как систему трех уравнений с тремя неизвестными. В таком случае для каждой системы нужно находить $x,\ y$ и z. Вообще неизвестных и уравнений в системе может быть сколько угодно. Исходя из алгоритма решения системы, можно понять, что если не противоречащих друг другу уравнений больше, чем неизвестных, то они лишние, если меньше, то решений бесконечно много, если столько же, то решение одно. Но можно рассматривать задачу 3 как систему из двух уравнений с неким дополнительным условием. Тогда достаточно найти $x,\ y$.

4. 2) (–41; –29); 4) (8; –19); 6) (11; –4); 7) (1;–1); 8) (2; –1); 9)(3;–2); 10) $(4\frac{4}{17};-5\frac{13}{17})$.

5. 1) $C=5x+y$; 2) $C=-4x+9y$; 3) $C=17x-y$; 4) $C=-11y$.

6. 2) (1; 2; 3); 3) (5; 1; 1).

7. 1) $x=9,\ y=-3$; 2) $x=5,\ y=2$; 3) x стоит тетрадь, $y-$карандаш,

$\begin{cases}3x+2y=44,\\ 2x+1=3y\end{cases}\Rightarrow x=10,\ y=7$; 4) $x-$скамеек, $y-$учеников,

$\begin{cases}5x+8=y,\\ 6x-3=y\end{cases}\Rightarrow x=11,\ y=63$; 5) $x-$на дереве; $y-$под деревом;

$\begin{cases}x+y=3(y-1),\\ x-1=y+1\end{cases}\Rightarrow x=7,\ y=5$.

8. 1) $(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$; 2) $(\frac{7}{12};-\frac{5}{12})$; 3) $\frac{1}{x+3}=u,\ \frac{1}{y-1}=v\Rightarrow x=1,y=4$; 4) (1; 1) и

(–1;1); 5) $u=\frac{x+y}{x-y},\ v=\frac{1}{y}\Rightarrow\begin{cases}u+v=\frac{5}{2},\\ u-3v=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=\frac{3}{2},\\ v=1\end{cases}\Rightarrow x=5,\ y=1.$

9. 1) $u=x^2,\ v=y^2\Rightarrow\begin{cases}u+v=9,\\ 5u-v=1\end{cases}$; 2) $u=\frac{x}{x+y},\ v=\frac{y}{x-y}\Rightarrow\begin{cases}u+v=3,\\ u-v=1\end{cases}$;

3) $u=\frac{1}{x^2},\ v=\frac{1}{y^2}\Rightarrow\begin{cases}u+v+3(u-v)=9,\\ 2u-v=3\end{cases}$;

4) $u=(x+1)^2,\ v=(y+1)^2\Rightarrow\begin{cases}u+v=13,\\ u-v=5\end{cases}$.

10. 1) (4; 1); 3) $\begin{cases}\frac{xy}{x+y}=-2,\\ \frac{xy}{3x+2y}=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{xy}{x+y}=-2,\\ 3x+2y=4x+4y\end{cases}\Rightarrow x=2,\ y=-1;$

4)

$$\begin{cases}\frac{4x}{x+y}=\frac{x+y}{x},\\ 2x-y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(\frac{x+y}{x}\right)^2=4,\\ 2x-y=5\end{cases}$$

$$a)\begin{cases}\frac{x+y}{x}=2,\\ 2x-y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x,\\ y=2x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=5,\\ y=5\end{matrix}\qquad b)\begin{cases}\frac{x+y}{x}=-2,\\ 2x-y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3x,\\ y=2x-5\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x=1,\\ y=-3\end{matrix}$$

5) $xy = u, \begin{cases} 2u + 3x = 5, \\ 3u - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1, \\ y = 1 \end{matrix}$ 7)

$$u = \frac{1}{x+y}, v = \frac{1}{x-y} \Rightarrow \begin{cases} 3u - v = 5, \\ 2u + 3v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{11}{8}, \\ y = -\frac{33}{40} \end{matrix}$$

8) $\frac{x+y}{2x-y} = u, \begin{cases} u + 3y = 1, \\ 3u - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{8}, \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}$

10) $(x-1)^2 = u, (y-1)^2 = v, \begin{cases} u + v = 7, \\ u - v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = 5, \\ v = 2 \end{matrix}$; нет решений в рациональных числах.

Комментарий. 1. В системах, типа 9. 2), 9. 3), 10.6) и др., перед тем, как их преобразовывать, необходимо указать ОДЗ.

2. Очень важно обратить внимание, что понятие системы связано с понятием «одновременно». Т.е. **система – это несколько условий, которые должны выполняться одновременно.** Ответом должна являться пара чисел: $x = \ldots$ и одновременно $y = \ldots$. Ответом могут быть две или более пар чисел.

3. Система 10 4) интересна тем, что по ходу решения она разбивается на две линейные системы. Собственно, то же происходит и с системами 8. 4) и 9. 2), но там это в самом конце работы. Рассмотрим, отдельно первое уравнение из системы 10. 4):

$\frac{4x}{x+y} = \frac{x+y}{x} \Rightarrow 4x^2 = (x+y)^2$ (правило пропорции). Переносим все в одну сторону и раскладываем на множители:

$4x^2 - (x+y)^2 = 0 \Rightarrow (2x - x - y)(2x + x + y) = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} x - y = 0, \\ 3x + y = 0. \end{matrix} \right.$ Получаем

объединение двух систем $\left[\begin{matrix} \begin{cases} x - y = 0, \\ 2x - y = 5; \end{cases} \\ \begin{cases} 3x + y = 0, \\ 2x - y = 5. \end{cases} \end{matrix} \right.$ И соответственно пару чисел для каждой системы.