Разбор и решение заданий кружков
Глава V «Уравнения», 7 класс.

(Материал взят из «Книги для учителя» к учебникам по алгебре М.И. Башмакова, 7 – 9 класс, издательство «Бином. Лаборатория знаний»)

Математический кружок.

Занятие 9. ***Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами***

1.Возможные корни: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$– корень. $x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = x^3 - x^2 - (x^2 - x) - 4(x-1) = (x-1)(x^2 - x - 4)$. Остальные числа не являются корнями.

2. Возможные корни: $\pm 1, \pm 3$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = -1, x_2 = 1-$корни.

$x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 3x - 3 = (x-1)(x^3 + 2x + 3) =$

$(x-1)(x^3 + x^2 - x^2 - x + 3x + 3) = (x-1)(x+1)(x^2 - x + 3).$

Других рациональных корней нет.

3. Свободный член равен 120. Положительные числа и числа, равные $-1, -3, -5$ не могут быть корнями, хотя являются делителями числа 120. Возможный корень –2. Проверкой убеждаемся, что $x = -2$ действительно корень.

4. Делаем замену $x^2 - 5x = u \Rightarrow u^2 - 2u - 24 = 0 \Rightarrow u_1 = -4, \quad u_2 = 6;$

$x^2 - 5x = -4 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4; x^2 - 5x = 6 \Rightarrow x_3 = -1, x_4 = 6.$

5. $x_1 = -2, x_{2,3} = \pm 1, x_4 = 0.$

6. Приводим к общему знаменателю и проверяем делители свободного члена, равного 144, получаем $x_1 = -2, x_2 = 6$.

7. Возможные корни $\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}$. Очевидный корень $x_1 = 1.$

Переносим все в одну сторону и выделяем множитель $(x-1)$:

$12x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 1 = 12x^4 - 12x^3 + 8x^3 - 8x^2 - (x^2 - 1) = (x-1)(12x^3 + 8x^2 - x - 1)$.

Проверкой убеждаемся, что $x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}$.

Занятие 10. ***Решение диофантовых уравнений***

1. Проверяется подстановкой.

2. Пусть в предыдущем задании $t = 0$, тогда $x = 6, y = 3-$ решение. Вычтем из уравнения $7x + 13y = 81$ числовое тождество 7·6+13·3=81,

получим $7(x-6) + 3(x-3) = 0 \Rightarrow 7(x-6) = -3(x-3)$, 7 на 3 не делится, следовательно, $x - 6$ делится на 3; по той же причине $y - 3$ делится на 7.

3. Проверяется подстановкой $x = 6 + 13t$ в уравнение.

4. По условию, $\begin{cases} 6+13t>0, \\ 3-7t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13t>-6, \\ 7t<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t>-\dfrac{6}{13}, \\ t<\dfrac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow t=0$.

5. 1) Одно решение очевидно: $x=1, y=2$. Вычитаем из уравнения $5x+7y=19$ числовое тождество $5\cdot1+7\cdot2=19$, получаем уравнение $5(x-1)+7(y-2)=0 \Rightarrow 5(x-1)=-7(y-2) \Rightarrow \begin{cases} x=1+7t, \\ y=2+5t \end{cases}$ (см. п.2).

$x>0, y>0 \Rightarrow t \geq 0$.

2) $\begin{cases} x=5+9t, \\ y=3+11t. \end{cases}$ $x>0, y>0 \Rightarrow t \geq 0$.

6. $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-3+14t. \end{cases}$ $x>0, y>0 \Rightarrow t>0,$ т.е. $t=1,2,3,\ldots$