РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ
из рабочей тетради для 7 класса, глава «Комбинаторика»

24 сентября 2014г. состоялся очередной семинар по теории и практике продуктивного обучения.

На семинаре выступал Марк Иванович Башмаков с лекцией об основных принципах продуктивного обучения, в соответствии с которыми написаны его учебники с 1 по 11 класс. Рассматривая один из принципов продуктивного обучения «Процесс важнее результата», в качестве примера, раскрывающего смысл этого принципа, М. И. Башмаков предложил участникам семинара рассмотреть задачу из рабочей тетради для 7 класса, привлекшую его внимание (глава «Комбинаторика», сюжет 103, с. 140, задание 8 из УМК «Алгебра, 7», Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний).

Условие задачи. ***Сколько различных пятизначных чисел можно получить из цифр* 1, 2, 3, 4, 5*, если число, составленное из трех первых цифр, делится на число, представленное последней цифрой.***

Самый содержательный вопрос в задаче касается того случая, когда число оканчивается цифрой 3.

Ответить на него нетрудно. Достаточно, например, перебрать числа из предложенных цифр в порядке возрастания. Чисел не так много, получится 41 трехзначное число, кратное трем, а пятизначных с последней цифрой 3 и с любой из пяти предложенных цифр на четвертом месте получится 205 чисел. Задание выполнено, ответ получен.

Марк Иванович обратил внимание, что если перед учащимися поставить целью решения – поиск закономерностей в составлении чисел, то эта задача позволяет повести учащихся другой дорогой, решить ее в общем виде, подтолкнуть учащихся к исследовательской деятельности. Смысл в этом есть даже после того, как получен ответ. Возможно, среди учащихся найдутся такие ученики, у которых сразу появится желание искать закономерности в образовании чисел и составлять формулы для подсчета их количества.

Решение задачи с такой целью приобретет совсем другое звучание с точки зрения развития учащегося, позволит ученикам проявить инициативу, раскрыть себя, обогатиться новыми идеями, подходами, избавиться от боязни решения трудных задач и пр.

Обсуждая, прикидывая подходы к решению проблемы, можно придти к такому способу, который предложил Марк Иванович.

Главные идеи решения, о которых нужно догадаться, следующие: первая – разделить числа на группы по модулю 3 (подсказывает условие); другая – строить числа в этих группах постепенно, начиная с однозначных (это известный прием решения математических задач – уменьшение числа объектов).

Итак, разделим числа на три группы: группа x_n – это числа, кратные 3, в этой группе однозначных чисел – одно, само 3; группа y_n – это числа, дающие остаток 1 при делении на 3, в нее входят два однозначных числа – 1 и 4; группа

z_n – это числа, дающие остаток 2 при делении на три, в нее входят тоже два однозначных числа – 2 и 5. Буквой n обозначим количество цифр в числе.

Однозначные числа из предложенных цифр, можно сказать, построили, среди них кратных трем – одно.

Теперь подсчитываем количество двузначных чисел, строя их из однозначных и предложенных цифр, затем трехзначных, четырехзначных. Для этого устанавливаем закономерности, вырабатываем правила, позволяющие производить подсчет. Основу для установления закономерностей составляют наблюдения, догадка, логика и накопленные знания о числах.

Правила такие.

Количество чисел, кратных трем, образуется из чисел составленных: а) с остатком 0 присоединением одного однозначного числа, кратного трем; б) из чисел с остатком 1 присоединением к ним двух однозначных чисел с остатком два; и наоборот.

Аналогичное рассуждение для чисел других групп.

Количество чисел с остатком 1 образуется из чисел с остатком 1 присоединением однозначного числа с остатком 0 и чисел с остатком 2 присоединением к ним двух однозначных чисел с остатком 2.

Количество чисел с остатком 2 получается из чисел с остатком 1 присоединением к ним однозначных их самих, а также чисел с остатком 2 присоединением к ним однозначного числа с остатком 0.

Итак, составляем формулы.

Для группы x_n: $\boldsymbol{x_n = 1 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot y_{n-1} + 2 \cdot z_{n-1}}$

Для группы y_n: $\boldsymbol{y_n = 2 \cdot x_{n-1} + 1 \cdot y_{n-1} + 2 \cdot z_{n-1}}$

Аналогичная формула для группы $\boldsymbol{z_n = 2 \cdot x_{n-1} + 2 \cdot y_{n-1} + 1 \cdot z_{n-1}}$

Получили рекуррентные формулы для подсчета количества чисел в каждой группе, для проверки правильности подсчетов учитываем, что суммарное количество чисел в тех группах равно 5^n, n – количество цифр в числе.

Теперь уже нетрудно вычислить количество чисел в каждой группе по формулам, результаты для интереса запишем в таблицу.

	Остаток 0 – это 3	Остаток 1 – это 1 и 4	Остаток 2 – это 2 и 5	Проверка, общее количество
Одно-значные	1 число	2 числа	2 числа	$5^1 = 5$
Двух-значные	9 чисел	8 чисел	8 чисел	$5^2 = 25$
Трех-значные	9 + 16 + 16 = = 41	18 + 8+ 16 = = 42	18 + 16 +8 = = 42	$5^3 = 125$
Четырех-значные	41 + 84+ 8 = = 209	82 + 42+ 84 = = 208	82 + 84 + 42 = = 208	$5^4 = 625$

Из решения задачи в рабочей тетради, следуя принципам продуктивного обучения, получили проект. Можно продлить исследование, рассматривая другой набор цифр, получатся другие проекты, а в общем – большая исследовательская работа, имеющая научный смысл.