М. БАШМАКОВ,
г. Санкт-Петербург

Давайте учить математике

Моя статья не претендует на изложение какой-то концепции обучения математике. У меня, разумеется, есть общие взгляды на этот предмет, и я их неоднократно излагал. Мне захотелось обсудить некоторые вопросы «внутренней жизни», несколько разнородные и не укладывающиеся в какую-то стройную структуру. Однако они важны, о них задумываются учителя, и им, возможно, будет интересно и полезно сравнить мои предложения со своими мыслями.

Надо ли учить тому, чего не бывает?

Взгляните на список заданий, выбранных мной из различных школьных материалов. Я намеренно не даю точных ссылок, так как в мою задачу не входит критика конкретных источников.

1. Решите неравенство
$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)\ge\log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

2. Найдите все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению
$$2008\left[n\sqrt{1004^2+1}\right]=n\left[2008\sqrt{1004^2+1}\right],$$
где $[x]$ — целая часть x.

3. Найдите все значения a, которые удовлетворяют условию $2 < a < 5$ и при которых уравнение
$$\log_2\left(3-|\sin ax|\right)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$$
относительно x имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $2\le x\le 3$.

4. а) Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений
$$\begin{cases}3^x+\dfrac{26}{3}\cos y=a^2+a,\\ 3^x-\dfrac{13}{3}\cos y=-1\end{cases}$$
имеет хотя бы одно решение.

б) Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x,\\ (x+y+a\sin 2z)\big((1-a)\ln(1-xy)+1\big)=0\end{cases}$$
имеет единственное решение.

5. Определите, при каких a уравнение
$$\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a}=2$$
имеет решения, и найдите эти решения.

6. Найдите все значения параметра a, при которых для любых значений параметра b имеет хотя бы одно решение неравенство
$$\left|\log_6\frac{x}{36}+\left(\frac{10a+3b+31}{3}\right)x^2-9b^2+9b+1\right|\le$$
$$\le\log_6\frac{36}{x}+\left(\frac{10a+3b+41}{5}\right)x^2-(6b+2)x+9b^2+15b+3.$$

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$||||x^2-a|-5|-2|+1|=3$$
имеет ровно 3 корня.

8. Найдите наименьшее значение величины
$$\frac{1}{c}\left(\frac{3a}{\sqrt{1-u^2}}+\frac{b}{\sqrt{1-t^2}}\right),$$
где a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условиям
$$at+bu\le c,\ a^2+2bcu\ge b^2+c^2,$$
$$\frac{b^2\left(t^2-u^2\right)}{t^2-1}+c^2\le 2bcu.$$

9. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$ и угол BAC — тупой. Пусть точка D — точка пересечения биссектрисы угла ABC со стороной AC, точка M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC, точка E — основание перпендикуляра, опущенного из D на сторону BC. Через точку D проведен также перпендикуляр к BD до пересечения со стороной BC в точке F. Известно, что $ME = FC = a$. Найдите площадь треугольника ABC.

10. Дана треугольная пирамида $ABCD$. На ребре AC взята точка F так, что $\frac{CF}{FA}=\frac{2}{9}$, на ребре CD взята точка M так, что AM — биссектриса угла DAC. Через точки F, M и точку пересечения медиан треугольника DAB проведена плоскость, пересекающая ребро DB в точке N. Известно, что $\frac{CA}{AD}=\frac{DN}{NB}+1$. Известно также, что отношение площади треугольника ABD к сумме площадей всех граней пирамиды $ABCD$ равно p, а длина перпендикуляра, опущенного из вершины C на плоскость ABD, равна h. Через точку N проведена плоскость, параллельная плоскости ACB и пересекающая ребра CD и DA в точках K и L соответственно. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $DKLN$.

Эти монстры взяты из материалов для подготовки к экзаменам. Ученик посмотрит на них с ужасом, учитель – с грустью и недоумением, математик — с презрением и отвращением.

Вместо того, чтобы спросить, как применяются изученные в школе математические понятия к решению естественно сформулированных задач, авторы, прежде всего, стараются ученика сбить с толку за счет искусственно насаждаемого языка, который затемняет смысл того, что спрашивается.

Нет в математике никаких логарифмов по переменным основаниям. Запись

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x)$$

есть не что иное, как зашифрованное выражение типа

$$\frac{\lg(3-x)}{\lg\left(12x^2-41x+35\right)}.$$

Это выражение может появиться в разных задачах, но составители сосредоточили внимание на переводе задачи с нелепого, придуманного ими языка.

Аналогичные соображения можно высказать и по остальным приведенным примерам. Переходя к конструктивным предложениям, хочу заметить, что «в прежние времена» существовала форма рекомендательных писем, которые выпускались административными органами на основе расширенных обсуждений итогов обучения математике. Письма составлялись профессионалами и хотя и попахивали формализмом, но все же определяли «правила игры». Теперь же такая задача ложится на наше сообщество – математиков, методистов, активных учителей. Нужно о чем-то договориться, чтобы стыд перед этим сообществом держал в узде неуемных сочинителей.

Давайте, например, договоримся о том:

— чтобы не использовать переменные основания логарифмов, а еще лучше — использовать только стандартные основания: 2, 10 и e;

— в выражениях с показательными функциями не использовать переменные в основании и показателе; если так уж хочется изучать x^x, то следует написать $e^{x\ln x}$ (или $2^{x\log_2 x}$);

— не «накручивать» модули (на моей памяти появление выражения типа $|x^2 - x|$ рассматривалось как находящееся на грани программных требований);

— осторожно отнестись к использованию параметров, используя их только при обсуждении изменения свойств стандартных функций;

— не требовать записи решений тригонометрических уравнений в общем виде; распространившаяся запись $x = (-1)^n\arcsin a + n\pi$ совершенно бессмысленна;

— убрать из алгебры рациональных выражений какие бы то ни было разговоры об ОДЗ – они там не к месту и часто ошибочны;

— избегать по мере возможности использования радикалов, которое опять же переносит центр тяжести со смысла на язык (обозначения).

Разумеется, этот список неполон, и я предлагаю учителям откликнуться, сделав свои замечания и добавления.

Что было бы разумным выбросить из практики обучения?

Если первый пункт говорил о «вредных», несуществующих в математике вещах, которые, разумеется, должны быть выкинуты из практики обучения, то к ним мне хочется добавить еще несколько пунктов, за счет которых можно было бы почистить, разгрузить программу и сосредоточить внимание на реализации главных целей обучения.

Мои предложения.

1. Навести порядок в записи чисел. Обыкновенные дроби использовать только с маленькими знаменателями, не допускать записи действий с числами, записанными по-разному (типа $\frac{5}{21}+0,35$). Сократить использование действий со смешанными дробями (сохранив, разумеется, важные вопросы, возникающие при смене единиц измерения или выделения целой части).

2. Вернуть модулю преимущественно геометрический смысл; модуль — это не математический объект для изучения, а лишь способ записи, удобный в некоторых случаях.

3. Вирус когда-то побежденной «болезни радикалов» в новом обличье снова вышел наружу. Разумно сохранить радикалы для записи часто встречающихся чисел типа $\sqrt{2}$, а для выражений с переменными ограничиться помещением под квадратный радикал линейных функций. Это позволит освободиться от казуистических примеров на «свойства радикалов».

4. В качестве оснований показательных и логарифмических выражений оставить только 2, 10 и e. При этом расширить технику работы с выражениями типа 2^{kx}, 10^{kx}, e^{kx} при различных k.

5. Пересмотреть содержательную линию «Уравнения и неравенства», вернувшись к ее «классическому» пониманию. Уравнение — это запись постановки некоторой реальной задачи. Буквы в уравнении — это неизвестные (а не переменные!). Главное в решении уравнения — поиск

способа его решения. Способы часто не зависят от смысла тех величин (чисел), которые можно представлять вместо букв. Уравнения (по крайней мере в основной школе) — в большей степени алгебраический вопрос, чем раздел теории функций. Вопрос применения свойств функций при решении уравнений (включая приближенное нахождение корней), конечно, важен, но его правильнее связать с функциональной линией.

Неравенства, напротив, имеют дело с действительными числами. В терминах неравенств часто записываются или исследуются свойства изучаемых функций. Следовало бы существенно сократить типы решаемых неравенств (во всяком случае, выбросить тригонометрические и большинство иррациональных неравенств), сдвинув акцент на геометрические методы (использование графиков).

6. Внимание к геометрии треугольника и окружности преувеличено. Можно также убрать свойства вписанных и описанных четырехугольников.

7. Заменить размножившиеся стереометрические задачи со сложными вычислениями на задачи действительно развивающие пространственное мышление.

С какими иллюзиями пора расстаться?

1. Несомненно, что математика будет нужна каждому нашему ученику. Это всегда служило оправданием усилий добиться того, чтобы каждый ученик обладал определенными умениями в использовании математического аппарата — от таблицы умножения до таблицы производных и интегралов. Среда нашей жизни изменилась — как учебная, так и производственная, не говоря уже об информационной. Математика стала еще нужнее, но со стороны общего развития интеллектуальных и человеческих качеств. Наши убеждения, что ученику в его профессиональной жизни придется складывать дроби с большими знаменателями, умножать столбиком числа, находить по формуле корни биквадратного уравнения, складывать синусы или решать треугольники, стали иллюзорными. Сразу скажу, что отсюда не следует, что такого рода вопросы надо исключить из программы. Просто на их роль надо взглянуть иначе, и этот новый взгляд (который требует подробного и серьезного раскрытия для каждой темы) снимет с нас груз ответственности и освободит время, так нужное для занятий математикой.

Итак, давайте перестанем убеждать наших учеников, что все, чем приходится заниматься на уроке математики, будет непосредственно использоваться в будущей жизни.

2. Со времен Евклида в головы учеников вколачивается мысль, что математика — дедуктивная наука, линейно разворачивающаяся как последовательность определений, аксиом, теорем и их доказательств. То, что так нельзя представить математику в целом для профессиональных нужд, стало ясно к началу XX века. То, что нельзя (понимая слово *нельзя* достаточно широко) аналогично представить школьную математику, становится ясно лишь сейчас — в связи с новыми открытиями в психологии и информатике. С иллюзией необходимости (и возможности) обучения математике в школе на дедуктивной основе расставаться учителям особенно трудно. Вот типичные упреки со стороны учителей в адрес учебных материалов: «Вы пользуетесь понятием многогранника, а никакого определения многогранника не даете», «Вы используете понятие пирамиды на 40-й странице, а даете определение пирамиды на 60-й», «Вы предлагаете сложить половину и четверть, хотя сложения дробей еще не было» и т.п.

Скажу сразу: доказательство высказываемых утверждений — это сердцевина математики. Я предлагаю не то чтобы выбросить определения и доказательства или сократить их роль в школьном обучении, а ровно наоборот. Существо моей точки зрения состоит в том, что в школьной математике не должно быть утверждений без аргументации. Но эта точка зрения заслуживает отдельного разбора.

Сейчас я говорю об иллюзиях. Математика — это не только набор утверждений и действий. Она для свойственного ей описания мира использует, прежде всего, свой собственный язык и свои методы, но широко также пользуется и другими языками. Зачем нужны определения, если нет использующих их доказательств? Нет ни одного доказываемого в школе утверждения о многогранниках вообще. Это соображение послужило финальной точкой в дискуссии о том, что такое многогранник, развернувшейся в 70-е годы на страницах «Математики в школе» с участием таких корифеев, как А.Д. Александров, А.Н. Колмогоров, А.В. Погорелов. Школьник опознает пирамиду гораздо раньше того, как у него появляется потребность в точном описании этого понятия. Для сложения половины и четверти достаточно представлять себе дележ яблока и даже не знать слова «дробь». При этом, разумеется, необходимо воспитывать у учеников потребность и умение объяснить, что он имеет в виду, используя те или иные слова. Другое дело, что эти объяснения не всегда будут иметь стандартную форму математических определений. Я не вижу беды, если на вопрос, что такое функция, ученик вместо привычной и малоосмысленной фразы начнет объяснение со слов: «функция, а это вот, когда...».

Более новой является мысль о нелинейности восприятия учеником нового материала. Садясь за компьютер, он, не задумываясь, перескакивает с одного на другое, уходит в незнакомое будущее и возвращается в забытое или пропущенное прошлое. Пусть ученик точно так же листает новый учебник. Требование, чтобы все говорящееся в данный момент основывалось на предыдущем, было сразу «понятным» и «объясненным», является несовременным. Когда человек осознает, что он что-то не понимает, и начинает искать сам нужную информацию или задавать учителю вопросы, происходит важнейший этап современного обучения.

3. Долгое время мне казалось, что проведение ЕГЭ является чисто политической акцией и воспринимал ЕГЭ так же, как воспринимают природное явление (скажем, идет дождь). Мне трудно было расстаться с иллюзией, что можно принять защитные меры (типа зонта или непромокаемой одежды) и уберечь школьную математику от негативного влияния ЕГЭ, использовав одновременно его положительные стороны.

Проведение ЕГЭ по математике оказывает негативное влияние на школу, по крайней мере, в следующих двух направлениях.

— Искажаются цели обучения математике в школе, зафиксированные в официальных документах (государственном стандарте). Эти цели многообразны, но ЕГЭ ориентирует учителя на реализацию лишь незначительной их части.

— ЕГЭ способствует социальному расслоению молодежи, поощряя неравноправие учащихся в поисках способа преодоления того барьера, который ставит ЕГЭ.

Главная опасность состоит в том, что отмеченные негативные стороны проведения ЕГЭ имеют явную тенденцию к их усилению, что может привести через несколько лет к необратимым последствиям.

Я призываю коллег освободиться, подобно мне, от иллюзии, что негативное влияние ЕГЭ на школу может быть преодолено улучшением его содержания или поиском новых форм его организации.

Что важнее — ответ или ход решения, результат или процесс?

Начну с цитаты, взятой из книги выдающегося современного психолога М. Холодной: «Воспитатель не стремится к определенному заранее результату. Усилия воспитателя направлены... на раскрытие (учеником) своих индивидуальных способностей, на поддержку его внутренней силы, а не на формирование конкретных нормативных способностей. Если обеспечены условия, необходимые для процесса свободного развития человека, его личностного роста, то позитивные результаты будут достигнуты самим человеком обязательно, хотя, возможно, не легко и не сразу».

Приведенная цитата сразу дает однозначный ответ на поставленный вопрос. Однако на практике дело обстоит не так просто. Мы привыкли ориентироваться на результат. Вводимая система государственной оценки качества обучения однозначно нацеливает на выполнение конкретных требований, достижение определенных результатов. К сожалению (а возможно, и к счастью), не все цели (ценности) обучения математике могут быть представлены в бинарной форме: да–нет, верно–неверно.

Попробуем посмотреть на существо вопроса не со стороны «закона», следование которому неоспоримо, а со стороны жизни «по понятиям», которые вошли в кровь благодаря нашим учителям, традициям, опыту.

Любой учитель всегда оценивал своего ученика не только по тому, как он написал контрольную, а по его стараниям, динамике внутреннего роста. Учителю было важно не только посмотреть на полученный ответ, но и на ход решения. В настоящий момент важность того, какой путь решения выбрал ученик, как этот выбор связан с его предыдущими успехами или неуспехами, заметно усилилась. Это связано с тем, о чем мы уже говорили раньше, — скорее всего, умение решать задачи школьного типа не понадобится, а тот путь, который проделал ученик при их решении, даст положительные сдвиги в его интеллектуальном развитии. Математика учит преодолевать трудности. При этом она дает возможность выбора пути их преодоления. Так мы приходим к важнейшему современному принципу педагогики, в силу которого различные пути (или, как говорят психологи, познавательные стили) становятся равноправными. Чем большим спектром этих стилей обладает ученик, тем эффективней система обучения. Такая посылка достаточно содержательно развита нами в новой серии учебников, где задания классифицируются, прежде всего, по предпочтительному стилю деятельности (алгоритмический, визуальный, прикладной, исследовательский и т.д.), а затем уже по сложности.

Итак, я предлагаю для обсуждения тезис о том, что процесс важнее результата, считаю, что с позиций этого тезиса следует критически взглянуть на наш выбор учебных материалов.

Окончание на с. 48.

Окончание. начало на с. 2—5.

Может быть, на уроке полезнее решить одну задачу пятью разными способами, чем «отработать» один прием на серии однотипных задач. Это давно уже общепризнано в методических рекомендациях, но чрезвычайно затруднено на практике — из-за обилия различных технических упражнений.

Можно ли увеличить трудность решаемых задач?

В получаемых мною отзывах на учебники полно учительских стонов: предлагаются слишком трудные задачи, они доступны лишь «продвинутым» ученикам или пригодны для работы лишь в специализированных классах и т. п.

Я абсолютно убежден, что, решая лишь серии простых упражнений, математике не научить, если иметь в виду сдвиги, произошедшие в понимании ее целей и ценностей. Через трудную задачу можно провести ученика, взяв его за руку, временами отпуская ее, временами взяв управление на себя. Разумеется, аналогичную задачу ученик затем не решит, никакого умения он не приобретет. Но он приобретет опыт общения с серьезной математикой, у него в сознании останется память о пройденном трудном пути, и эта память может оказаться весьма ценной для его математического развития.

Итак, мое предложение: смело включать в ткань учебного процесса отдельные трудные задачи с запоминающейся формулировкой и неочевидным, но содержательным путем решения (а возможно, и несколькими путями). Помимо всего прочего, решая вместе с учеником трудную задачу, мы возвышаем его своим доверием, высокой оценкой его способностей.

Вообще, я склонен считать, что из трех точек притяжения ценностей математического образования (утилитарная, развивающая и воспитательная) именно воспитательная выдвигается сейчас на первый план.

Математика в школе должна быть красивой, должна быть интересной, должна нравиться, должна быть полезной здесь и сейчас, в классе, а не в каком-то отдаленном будущем. Монстры, с демонстрации которых мы начали свою статью, могут лишь надломить накопленные нами традиции школьного математического образования.

В заключение хочется сказать следующее. Я понимаю, как легко оспорить большинство высказанных мной положений, которые часто сформулированы слишком безапелляционно. Это сделано намеренно, чтобы заострить на них внимание. Не стоит и придираться к приводимым примерам. Важнее понять главную мысль автора — школьная математика в опасности. Необходимо сделать более отчетливым общественное внутрипрофессиональное мнение на происходящие сдвиги в математическом образовании, с негативной оценкой которых соглашаются все, с кем мне приходилось беседовать на эту тему.

Шеф-редактор: С. Островский
Главный редактор: Л. Рослова
Ответственный секретарь: Т. Черкавская
Редакторы: П. Камаев, И. Бокова, О. Макарова
Корректор: Л. Громова
Компьютерная верстка: Л. Кукушкина

Учредитель ООО «Чистые пруды»
Газета «Математика» выходит 2 раза в месяц
Цена свободная

Адрес редакции и издателя: ул. Киевская, д. 24, Москва 121165.
Тел./Факс: (499) 249 3138
Отдел рекламы: (499) 249 9870
Редакция газеты «Математика»: тел.: (499) 249 3460
E-mail: mat@1september.ru
WWW: http://mat.1september.ru

Индексы подписки:
каталог агентства «Роспечать»
32 030 (для индивидуальных подписчиков)
32 594 (для организаций)
каталог агентства «Почта России»
79 073 (для индивидуальных подписчиков)
79 583 (для организаций)
Зарегистрировано Министерством РФ по делам печати. ПИ № 77-7236 от 12.04.01
Зак. № Тираж 19 000
Подписано в печать 18.02.2010

Отпечатано в ОАО «Чеховский полиграфический комбинат», ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г.Чехов 142300